Séminaire Bourbaki Mars 2001
53ème année, 2000-2001, n$^{\mathrm{o}}$ 885

FONCTIONS POLYLOGARITHMES, NOMBRES POLYZÊTAS ET GROUPES PRO-UNIPOTENTS

par **Pierre CARTIER**

INTRODUCTION

La fonction zêta de Riemann est une vieille connaissance. Ce n'est que très récemment qu'on s'est intéressé à une généralisation à r variables $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ et aux fonctions polylogarithmiques $Li_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ à plusieurs indices. Il y a de profondes relations, non toutes explorées, avec la théorie des nombres, la géométrie algébrique, la théorie des nœuds, et même la physique mathématique. C'est aussi un domaine où l'expérience numérique à grande échelle est possible et a été faite. Il y en a pour tous les goûts.

Dans la première partie, nous donnerons un exposé semi-historique de tout ce qui tourne autour de la fonction $\zeta(s)$. La deuxième partie est élémentaire au sens de Nielsen et de son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli » ; nous avons autant que possible calqué les méthodes de la première partie, mais beaucoup reste à faire. La troisième partie introduit les puissantes méthodes combinatoires de séries formelles non commutatives, et donne les théorèmes de structure sur les algèbres de fonctions polylogarithmes et des nombres « polyzêtas formels ». Enfin, dans la conclusion, on décrit rapidement quelques-unes des voies plus profondes, où se développera la théorie.

Remerciements : Ils vont à tous les participants du groupe de travail de l'I.H.P. (lundi matin) sur les polylogarithmes, qu'ils viennent de Paris, d'Orsay ou de Lille, et particulièrement G. Racinet, M. Waldschmidt, L. Boutet de Monvel, M. Petitot, G. Jacob et Hoang Ngoc Minh. Je remercie également D. Broadhurst, J. Écalle et D. Kreimer pour toutes les discussions et la documentation fournie. Merci aussi à J. Oesterlé et G. Vigeral pour une relecture très soignée.

1. PRÉLUDE : « THROUGH THE LOOKING-GLASS AND WHAT EULER FOUND THERE »

1.1. C'est à visiter le jardin des merveilles mathématiques qu'Euler nous convie dans son ouvrage « Introductio in Analysin Infinitorum », publié à Lausanne en 1748. À la page 134 (de l'édition française [A5]), on trouve une table dont voici le début[(1)]

$$\text{(A)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ etc}$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ etc}$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ etc}$$

$$\text{(D)} \qquad \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ etc.}$$

La première formule est due à Leibniz (1680), et constitue ce qu'il appelait la « quadrature arithmétique du cercle » et dont il tirait une gloire légitime.

Dans la même veine, on trouve la formule d'Euler

$$\log\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc} \tag{1}$$

pour le logarithme népérien (qu'il appelle « hyperbolique ») de 2 (*ibid.* p. 90).

Depuis 1680 environ, le calcul des séries est d'actualité. Introduit par Leibniz, Johann Bernoulli et Newton, il intervient surtout par les développements en séries de puissances, mais c'est Euler qui en fera un instrument performant pour le calcul numérique. Il donne la formule fondamentale

$$\log\,(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \cdots\,, \tag{2}$$

dont la formule (1) est le cas particulier $s = 1$. Pour nous, le moyen le plus simple d'obtenir (2) est de partir de la formule intégrale

$$\log\,(1+s) = \int_0^s \frac{dt}{1+t}\,, \tag{3}$$

d'utiliser la série géométrique

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\,, \tag{4}$$

et d'intégrer terme à terme. La formule (A) pour π s'obtient de manière analogue, avec les deux étapes

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad , \qquad \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \tag{5}$$

Jusque là , nous sommes dans le domaine « algorithmique » de l'Analyse. J'entends par là (*cf.* [A4]) que les fonctions fondamentales (logarithme, exponentielle, ...) sont données par des formules utilisant séries, intégrales,... et que l'on utilise les règles de calcul standard (intégration par parties, échange des opérations de sommation, d'intégation, dérivation, etc.) auxquelles il faudrait ajouter (après Riemann) la caractérisation des

(1) Noter $\pi\pi$ écrit pour π^2 ; c'est un usage courant, de Descartes à Gauß.

fonctions comme solutions d'équations différentielles, et (après Cauchy) les règles du calcul des résidus et de l'intégration complexe. Tout ceci sans le moindre ε.

Du point de vue algorithmique, voici une démonstration de la (première) formule (5). Définissons[(2)] géométriquement le nombre π comme l'aire d'un disque de rayon 1. Utilisant les propriétés de symétrie du cercle, $\frac{\pi}{4}$ est l'aire du domaine D défini par les inéquations $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ (fig. 1). On obtient une représentation paramétrique de D par

$$x = r\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y = r\frac{2t}{1+t^2} \qquad (0 \leq r \leq 1\,,\, 0 \leq t \leq 1) \tag{6}$$

et le calcul du déterminant jacobien (algorithmique !) donne $dx\,dy = \frac{2r}{1+t^2}\,dr\,dt$, d'où

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1\int_0^1 dr\,dt\,\frac{2r}{1+t^2} = \int_0^1 2r\,dr\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

(utiliser Fubini et $2rdr = dr^2$). La formule (3) s'interprète aussi en termes d'aire, justifiant le terme « hyperbolique » (fig. 2).

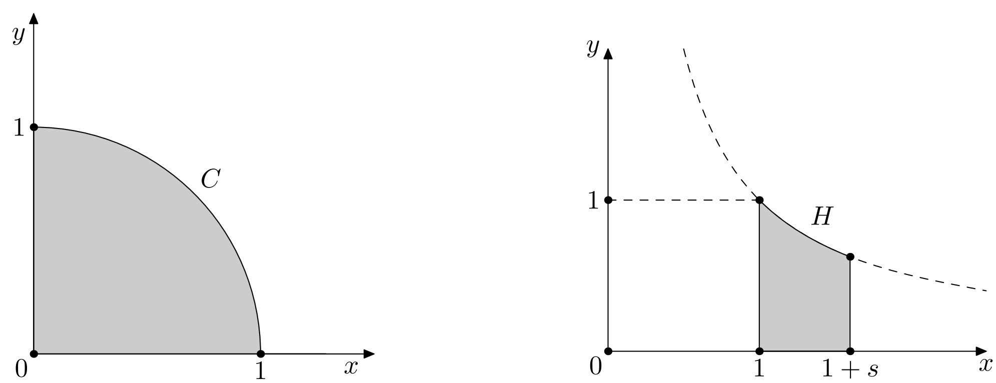

FIG. 1. Le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ FIG. 2. L'hyperbole H d'équation $xy = 1$

1.2. Les formules (B), (C), (D) d'Euler sont autrement difficiles à établir. En notation moderne, la série (B) s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; par séparation des termes avec n pair ou impair dans la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, on obtient l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,, \tag{7}$$

de sorte que la formule (B) est équivalente à la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \tag{8}$$

[(2)]C'est dans l'ouvrage cité qu'Euler introduit les notations classiques pour les nombres e et π, ainsi que le facteur de conversion $k = \log 10 = 2,30258...$ entre logarithmes décimaux et naturels.

une des plus belles trouvailles d'Euler. Une série très voisine (connue de Leibniz et Johann Bernoulli) est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; comme on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, c'est une « série télescopique », de la forme

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

dont la somme vaut 1, par compensation des termes adjacents $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$,...

Pour la sommation de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (que je désignerai désormais par la notation moderne $\zeta(2)$), Daniel Bernoulli donne en 1728 l'approximation numérique 8/5 suivi, la même année, de Goldbach qui indique $1,6445 \pm 0,0008$. En 1731, Euler obtient 6 décimales exactes $\zeta(2) = 1,644934...$ par la méthode suivante : considérons l'intégrale double

$$I = \iint_T \frac{dx\,dy}{xy} \tag{9}$$

étendue au triangle T défini par $x \leq 1$, $y \leq 1$, $x + y \geq 1$. Elle se réécrit

$$I = \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_{1-y}^1 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{y}(-\log(1-y))\,, \tag{10}$$

puis, par utilisation de la formule (2) et intégration terme à terme

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dy}{y} \cdot y^n/n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 y^{n-1} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,; \tag{11}$$

finalement, on a $I = \zeta(2)$. Euler utilise alors un argument d'intégration par parties, dont je donne une version géométrique : décomposer le triangle T en deux triangles T', T'' et un carré C (voir figure 3).

Les deux triangles donnent la même contribution (par raison de symétrie), que l'on peut évaluer comme plus haut

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y}(-\log(1-y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2^n}\,; \tag{12}$$

le carré contribue $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y} = (\log\, 2)^2$, d'où

$$I = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2.2^n} + (\log\, 2)^2. \tag{13}$$

Tronquant la série à $\sum_{n=1}^{14} \frac{1}{n^2.2^n}$, et utilisant le logarithme népérien de 2 (donné avec 25 décimales par Euler à la page 90 de [A5]), Euler obtient la valeur annoncée[(3)].

La démonstration précédente est la première apparition connue du *dilogarithme*, donné pour $0 \leq z \leq 1$ par les trois expressions équivalentes

$$Li_2(z) = \iint_D \frac{dx\,dy}{xy} = \int_0^z \frac{dy}{y}(-\log(1-y)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{14}$$

[(3)]Euler a-t-il reconnu la valeur numérique de $\pi^2/6$?

(*cf.* calcul précédent), où le domaine D est défini par les inégalités (fig. 4)

$$x \leq 1 \quad , \quad y \leq z \quad , \quad x + y \geq 1.$$

L'argument géométrique précédent fournit l'équation fonctionnelle

$$Li_2(z) + Li_2(1-z) = Li_2(1) - (\log z)\ \log(1-z)\,, \tag{15}$$

dont Euler utilise le cas particulier $z = \frac{1}{2}$. Évidemment, on a $Li_2(1) = \zeta(2)$.

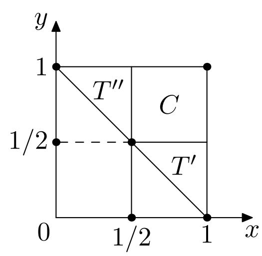

Fig. 3

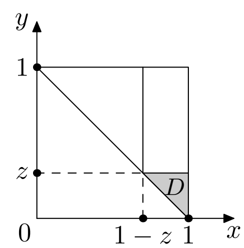

Fig. 4

La formule (B) admet une démonstration directe, avec une intégrale double analogue à celle de (9) ; Euler connaissait une telle méthode, mais nous donnons la variante de Calabi. Posons

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1 - x^2y^2}. \tag{16}$$

Comme on a $\frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n}$, l'intégration terme à terme donne immédiatement $J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Par ailleurs, le changement de variables[(4)]

$$x = \frac{\sin\,u}{\cos\,v} \quad , \quad y = \frac{\sin\,v}{\cos\,u} \tag{17}$$

transforme $\frac{dx\,dy}{1-x^2y^2}$ en $du\ dv$, et le domaine $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, en le domaine $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, $u + v \leq \frac{\pi}{2}$, d'où $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$ par un argument géométrique.

1.3. Les arguments fondés sur les représentations intégrales seront développés au n° 2.6 en utilisant la théorie des intégrales itérées [A12]. Pour calculer $\zeta(2)$, Euler utilise la théorie des fonctions symétriques. Considérons une suite infinie de variables $t_1, t_2, \ldots$, les fonctions symétriques élémentaires

$$\lambda_r = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} t_{n_1} \ldots t_{n_r} \tag{18}$$

(avec la convention $\lambda_0 = 1$) et les sommes de puissances

$$\psi_r = \sum_{n>0} t_n^r \qquad (r \geq 1). \tag{19}$$

[(4)]Si l'on tient à se limiter aux fonctions algébriques, poser $\xi = \mathrm{tg}\,u$, $\eta = \mathrm{tg}\,v$, comme le font Kontsevitch et Zagier.

La substitution $t_n \leftarrow 1/n^2$ donne respectivement la série[5]

(20) $$\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{r}) = \sum_{(n)} \frac{1}{n_1^2 \ldots n_r^2}$$

pour λ_r et

(21) $$\zeta(2r) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^{2r}}$$

pour ψ_r. On dispose des relations bien connues de Newton

(22) $$\psi_r = \lambda_1\psi_{r-1} - \lambda_2\psi_{r-2} + \ldots + (-1)^r\lambda_{r-1}\psi_1 + (-1)^{r+1}r\lambda_r\,,$$

permettant le calcul par récurrence des ψ_r en fonction des λ_r, et donc de $\zeta(2r)$ en fonction de $\zeta(2)$, $\zeta(2,2), \ldots, \zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{r})$. Par exemple

(23) $$\zeta(4) = \zeta(2)^2 - 2\zeta(2,2)\ ,\ \zeta(6) = \zeta(2)^3 - 3\zeta(2)\zeta(2,2) + 3\zeta(2,2,2).$$

Il reste à calculer les nombres $\zeta(2,\ldots,2)$; mais l'identité classique

(24) $$\prod_{n>0}(1 - tt_n) = \sum_{r\geq 0}(-1)^r\lambda_r t^r$$

se spécialise en la série génératrice

(25) $$\sum_{r\geq 0}(-1)^r\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{r})t^r = \prod_{n>0}\Big(1 - \frac{t}{n^2}\Big).$$

un polynôme $P(t)$ qui satisfait à $P(0) = 1$ et dont les racines sont $z_1, \ldots, z_m$ s'écrit sous la forme

(26) $$P(t) = \prod_{n=1}^{m}\Big(1 - \frac{t}{z_n}\Big).$$

Dans un premier temps, Euler admet que ceci reste valable dans le cas $m = \infty$ et l'applique à la fonction $P(t) = \frac{\sin\pi\sqrt{t}}{\pi\sqrt{t}}$ qui satisfait à $P(0) = 1$, s'annulant pour $t = 1^2, 2^2, \ldots$ mais pour nulle autre valeur de t. Après la substitution $t = z^2/\pi^2$, on obtient la formule-clé suivante

(27) $$\sin\, z = z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\Big)\,;$$

par comparaison avec (25), on obtient l'évaluation

(28) $$\zeta(\underbrace{2,\ldots,2}_{r}) = \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}.$$

---

[5] On désigne désormais par $\sum_{(n)}$ une sommation sur toutes les suites d'entiers $n_1 > \ldots > n_r > 0$, où r est fixé (et implicite dans la notation).

Utilisant les formules (23), on trouve de suite

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \ , \tag{29}$$

d'où en particulier les formules (B) et (D) d'Euler. Des formules (22) et (28), il résulte immédiatement que $\zeta(2r)/\pi^{2r}$ est un nombre rationnel.

Les contemporains d'Euler ne manquèrent pas de signaler que la formule de produit (27) ne va pas de soi. Dans son « Introductio » (voir [A5] à la page 117), Euler revient sur ce point, et donne une démonstration conforme aux standards de rigueur de l'époque, et reprise, avec les ε nécessaires, dans les ouvrages plus récents. J'ai proposé, dans mon « Mathémagique » [A10], une démonstration pratiquement sans calcul et s'appuyant sur le théorème de Liouville, selon lequel toute fonction entière et bornée est constante.

Nous revenons plus loin sur le calcul des nombres rationnels $\zeta(2r)/\pi^{2r}$ (formule (38)).

1.4. On doit aussi à Euler le calcul des sommes divergentes $S_r = 1^r - 2^r + 3^r - 4^r + \ldots$. A peu de choses près, il utilise la sommation d'Abel, en introduisant les séries $\Phi_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n$ (pour $r = 0, 1, 2, \ldots$) et en régularisant S_r par $S_r = -\lim_{z\to -1} \Phi_r(z)$. Les séries $\Phi_r(z)$ ont un rayon de convergence égal à 1, et représentent des fonctions rationnelles

$$\Phi_r(z) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^r \frac{z}{1-z}. \tag{30}$$

Le calcul peut se faire de manière combinatoire au moyen des nombres de Stirling ; il est plus simple de poser $z = -e^{-t}$, de sorte que la limite $z \to -1$, $|z| < 1$, soit réalisée par $t \to 0$, $0 < t$. On trouve alors

$$S_r = (-1)^r \left(\frac{d}{dt}\right)^r \frac{1}{1+e^t}\Big|_{t=0} ; \tag{31}$$

la relation

$$\frac{1}{1+e^t} = -\frac{1}{t}\left[\frac{2t}{e^{2t}-1} - \frac{t}{e^t-1}\right], \tag{32}$$

jointe à la définition des nombres de Bernoulli

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{r=0}^{\infty} B_r t^r / r! \tag{33}$$

donne le résultat

$$S_r = (-1)^{r+1}(2^{r+1}-1)\frac{B_{r+1}}{r+1}. \tag{34}$$

Par ailleurs, une manipulation formelle, connue d'Euler, donne

$$1^r - 2^r + 3^r - 4^r + \ldots = (1 - 2^{r+1})(1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots), \tag{35}$$

d'où notre auteur conclut (pour $r = 1, 2, 3, \ldots$)

$$1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \tag{36}$$

(car B_{r+1} est nul si $r \geq 2$ est pair, d'où la disparition du signe $(-1)^{r+1}$).

1.5. Si l'on introduit (enfin) la fonction de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, la formule précédente s'écrit

$$\zeta(-r) = -\frac{B_{r+1}}{r+1} \qquad (\text{pour } r = 1, 2, \ldots), \tag{37}$$

alors que la formule (29) se généralise en

$$\zeta(2r) = (-1)^{r+1} \frac{2^{2r-1} B_{2r}}{(2r)!} \pi^{2r} \qquad (\text{pour } r = 1, 2, \ldots). \tag{38}$$

Pour pouvoir définir correctement $\zeta(-r)$, il faut faire le prolongement analytique de $\zeta(s)$, que la série ne définit que pour Re $s > 1$. La méthode standard part de la représentation intégrale de la fonction Γ ; lorsque Re $s > 0$, on a

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \tag{39}$$

et le prolongement analytique de Γ se fait par la formule

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n!(s+n)} + \int_0^{\infty} t^{s+N-1} R_N(t) dt \tag{40}$$

dans le demi-plan Re $s > -N$; on a défini la fonction $R_N(t)$, continue sur $[0, +\infty[$, sauf un saut en $t = 1$, par

$$R_N(t) = \begin{cases} [e^{-t} - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^n / n!] . t^{-N} & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} t^{-N} & \text{pour } 1 < t. \end{cases} \tag{41}$$

La représentation intégrale

$$\Gamma(s)\, \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \tag{42}$$

est valable dans le demi-plan Re $s > 1$. Le prolongement analytique se fait par

$$\Gamma(s)\, \zeta(s) = \sum_{n=-1}^{N-1} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!(s+n)} + \int_0^{\infty} t^{s+N-1} S_N(t) dt \tag{43}$$

dans le demi-plan Re $s > -N$; la fonction $S_N(t)$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$, sauf un saut en $t = 1$, par

$$S_N(t) = \begin{cases} [(e^t - 1)^{-1} - \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} t^n / (n+1)!] . t^{-N} & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ (e^t - 1)^{-1} t^{-N} & \text{pour } 1 < t. \end{cases} \tag{44}$$

D'après ce qui précède, $\Gamma(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples pour $s = 0, -1, -2, \ldots$ et $\Gamma(s)\, \zeta(s)$ a, lui, au plus des pôles simples pour $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$. Par division, $\zeta(s)$ n'a plus qu'un pôle pour $s = 1$, et l'on retrouve la valeur $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$, pour $n \geq 1$, à partir de (40) et (43), ainsi que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. La formule (35) suggère l'introduction de la fonction $\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$, égale à $1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \dots$ pour $\mathrm{Re}\ s > 1$, qui n'a plus de pôle en $s = 1$. C'est donc une fonction entière.

Voici une autre méthode pour faire le prolongement analytique de $\eta(s)$, donc de $\zeta(s) = \eta(s)/(1-2^{1-s})$. Tout d'abord, le dilogarithme (14) se généralise en un *polylogarithme*

$$Li_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}\,; \tag{45}$$

cette série converge absolument pour tout s complexe, et tout z avec $|z| < 1$. On réalise le prolongement analytique de $Li_s(z)$ pour (s,z) dans $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[)$ en deux étapes :

a) Lorsque $\mathrm{Re}\, s > 0$, on utilise la formule intégrale

$$\Gamma(s)\, Li_s(z) = \int_0^{+\infty} \frac{z\, t^{s-1}}{e^t - z}\, dt.$$

b) Lorsque $\mathrm{Re}\, s > -N$, avec $N \geq 1$ entier, on utilise la formule de dérivation

$$Li_s(z) = \big(z \frac{d}{dz}\big)^N Li_{s+N}(z).$$

On a alors

$$\eta(s) = -Li_s(-1) = -\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} Li_s(z) \tag{46}$$

pour tout s complexe. Autrement dit, *la série* $1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \dots$ *converge, au sens d'Abel, pour tout* s*, vers la somme* $\eta(s)$. Le calcul $\eta(-r) = 1^r - 2^r + 3^r - \dots$, fait dans 1.4, selon la méthode d'Euler, est donc justifié.

1.6. Jusqu'ici, nous n'avons pas commenté la formule (C) d'Euler. En fait, les formules (A) à (D) ont une même source; les séries s'écrivent toutes sous la forme $L(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{nr}}{(2n+1)^r}$, et le résultat s'exprime par le fait que les nombres $L(r)/\pi^r$ sont rationnels (et calculables). C'est la première apparition du phénomène du *poids* : le poids de la série $L(r)$ est l'exposant r avec lequel n apparaît au dénominateur du n^e terme; on sait que $\pi = 4L(1)$ est de poids 1, donc en admettant que le poids d'un produit est la somme des poids, le nombre $L(r)/\pi^r$ est de poids 0. *La philosophie de base est que les nombres de poids* 0 *ont une chance d'être rationnels* (ou algébriques), *mais non ceux de poids non nul.*

Une manipulation simple donne

$$L(r) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4m+1)^r}\,, \tag{47}$$

et cette série est donc le prototype de séries de la forme

$$L_{a,b}(r) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(ma+b)^r} \qquad (a \neq 0\ ,\ b/a \notin \mathbb{Z})\,, \tag{48}$$

sommées par Euler. Voici une démonstration simple, qui n'est pas celle d'Euler. La factorisation (27) du sinus s'écrit

$$\sin \pi v = \pi v \prod_{m \neq 0} \Big(1 - \frac{v}{m}\Big) \tag{49}$$

(m parcourant $\mathbb{Z}$, et $m \neq 0$). La dérivée logarithmique donne

$$\pi \operatorname{cotg} \pi v = \frac{1}{v} + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{v - m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{m + v}\,, \tag{50}$$

où la sommation est effectuée symétriquement :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} = \lim_{M \to \infty} \sum_{|m| \leq M} .$$

En dérivant $r - 1$ fois par rapport à v, on obtient

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + v)^r} = \pi^r F_r(\operatorname{cotg} \pi v)/(r - 1)!\,, \tag{51}$$

où F_r est un polynôme à coefficients entiers, d'où immédiatement

$$L_{a,b}(r) = \frac{\pi^r}{a^r} F_r\Big(\operatorname{cotg} \pi \frac{b}{a}\Big)/(r - 1)!. \tag{52}$$

Supposons a et b entiers et b non multiple de a ; alors $\operatorname{cotg} \pi \frac{b}{a}$ est un nombre algébrique, et il en est donc de même de $L_{a,b}(r)/\pi^r$ (qui est de poids 0 !). Comme conséquence, on peut sommer les séries de Dirichlet $L(f, s) = \sum_{m \neq 0} f(m) m^{-s}$, pourvu que $f(0) = 0$ et que f soit périodique[(6)] ; si $f(m + a) = f(m)$ pour tout m, avec $a > 0$ entier, on a

$$L(f, r) = \sum_{b=1}^{a-1} f(b) L_{a,b}(r)\,, \tag{53}$$

donc $L(f, r)/\pi^r$ *est un nombre algébrique si* f *prend des valeurs algébriques. La substance de tout ceci est dans Euler, un siècle avant Dirichlet.*

La formule (50) fournit une série génératrice pour les valeurs $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$, à savoir

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi v} = \frac{1}{v} - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \zeta(2r)\, v^{2r-1}\,; \tag{54}$$

on a par ailleurs

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi v} = \pi i \Big[\frac{2}{e^{2\pi i v} - 1} + 1\Big] = \pi i + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^r B_r}{r!} v^{r-1} \tag{55}$$

d'après la série génératrice (33). La formule (38) pour $\zeta(2r)$ découle immédiatement de là, ainsi que le fait que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_r = 0$ pour $r \geq 3$, r impair.

---

(6) Dans le cas particulier où $f(0) = 0$ et $f(-m) = (-1)^r f(m)$, la série $L(f, r)$ peut s'écrire $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^r}$.

1.7. Les calculs précédents suggèrent d'introduire la série

$$\zeta(s;v)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+v)^{-s}\,, \tag{56}$$

connue sous le nom de *fonction zêta d'Hurwitz*. Naturellement, pour $v=1$, on retrouve la fonction zêta de Riemann.

La série (56) converge pourvu que l'on ait Re $s>1$, et que v appartienne au plan complexe $\mathbb{C}_+$, coupé le long de $]-\infty,0]$. Pour faire le prolongement analytique en s, on se ramène au cas où $\operatorname{Re} v>0$ en supprimant un nombre fini de termes de (56), puis on utilise la formule intégrale

$$\Gamma(s)\zeta(s;v)=\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}e^{-t(v-1)}}{e^t-1}dt \tag{57}$$

(valable pour $\operatorname{Re} s>0$, $\operatorname{Re} v>0$) et le développement limité de $\frac{e^{-t(v-1)}}{e^t-1}$ comme au n° 1.5. Le résultat est que $\zeta(s;v)$ est holomorphe pourvu que $s\neq 1$ et que v ne soit pas réel négatif. De plus on a deux équations fonctionnelles[(7)]

$$\zeta(s;v+1)=\zeta(s;v)-v^{-s} \tag{58}$$

$$\zeta(s+1;v)=-\partial_v\zeta(s;v)/s. \tag{59}$$

Au n° 1.5, on a introduit le polylogarithme $Li_s(z)$ pour s dans $\mathbb{C}$ et z dans le plan $\mathbb{C}$ coupé le long de $[1,+\infty[$. La formule suivante est due à Jonquière et donne une autre méthode pour définir le prolongement analytique[(8)] de $\zeta(s;v)$ lorsque $0<\operatorname{Re} v\leq 1$:

$$\zeta(s;v)=i(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\big[e^{-\pi is/2}Li_{1-s}(e^{-2\pi iv})-e^{\pi is/2}Li_s(e^{2\pi iv})\big]. \tag{60}$$

L'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ et des séries de Dirichlet $L(f,s)$ (avec f périodique) peut se déduire de là. Signalons que la *fonction de Lerch*

$$\Phi(z,s,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+v)^s} \tag{61}$$

englobe la fonction de Hurwitz $\zeta(s;v)=\Phi(1,s,v)$ et les polylogarithmes $Li_s(z)=z\Phi(z,s,1)$. La fonction de Lerch satisfait à une relation de symétrie ([A3], page 29, formule (7)).

1.8. Par généralisation de la formule (37), on obtient

$$\zeta(-r;v)=\frac{B_{r+1}(v)}{r+1}\qquad(\text{pour } r=0,1,2,\ldots)\,, \tag{62}$$

(7) Sous forme intégrale, l'équation (59) s'écrit

$$\zeta(s;v)=s\int_0^{\infty}\zeta(s+1;v+p)\,dp\,;$$

le prolongement analytique de $\zeta(s;v)$ pour $\operatorname{Re} v>0$, $s\in\mathbb{C}$ peut se faire au moyen de cette formule.

(8) La formule (58) permet de se débarrasser de la restriction $0<\operatorname{Re} v\leq 1$.

où les polynômes de Bernoulli sont définis par la série génératrice usuelle

$$\frac{te^{vt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(v)\frac{t^n}{n!}. \tag{63}$$

En particulier, on a $\zeta(0;v)=\frac{1}{2}-v$ et plus précisément

$$\zeta(s;v)=\frac{1}{2}-v+s\,\log\frac{\Gamma(v)}{\sqrt{2\pi}}+O(s^2) \tag{64}$$

pour s voisin de 0. Par dérivation en v, et compte tenu de la relation $\zeta(s;v)=-\partial_v\zeta(s-1;v)/(s-1)$ (formule (59)), on obtient

$$\zeta(s;v)=\frac{1}{s-1}-\psi(v)+O(s-1) \tag{65}$$

pour s voisin de 1. On a posé

$$\psi(v)=\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}. \tag{66}$$

La formule (64) s'écrit aussi

$$\partial_s\zeta(s;v)\Big|_{s=0}=\log\frac{\Gamma(v)}{\sqrt{2\pi}} \tag{67}$$

et se relie à la théorie des *produits infinis régularisés*. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|^{-N}<+\infty$ pour $N>0$ assez grand ; on considère la série de Dirichlet $Z(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-s}$, convergente pour $\mathrm{Re}\,s$ assez grand[9]. Si elle admet un prolongement analytique jusqu'au voisinage de 0, on pose

$$\prod_{n\geq 0}{}^{\mathrm{reg}}\lambda_n := \exp -Z'(0). \tag{68}$$

Avec ces notations, la formule (67) s'écrit

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(v)}=\prod_{n\geq 0}{}^{\mathrm{reg}}(v+n). \tag{69}$$

On peut fonder la théorie de la fonction gamma sur la base des formules (67) et (69). En particulier, comme le suggère la formule (69), la fonction $1/\Gamma(v)$ est entière et s'annule aux points $v=0,-1,-2,\ldots$ à l'ordre 1. On peut comparer (69) à la *formule de Weierstrass*[10]

$$1/\Gamma(v)=ve^{\gamma v}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{v}{n}\Big)e^{-v/n}\,, \tag{70}$$

[9] En supposant, pour simplifier, qu'aucun des nombres λ_n n'est réel négatif, on a défini

$$\lambda_n^{-s} := \exp -s\,\mathrm{Log}\,\lambda_n,$$

avec la branche principale du logarithme.

[10] On note γ la constante d'Euler, égale à la limite de $\Big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\Big)-\log N$ pour $N\to\infty$. En un certain sens, c'est la valeur régularisée de la série divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\zeta(1)$.

qui donne par dérivation

$$\psi(v) = -\gamma - \frac{1}{v} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+v}\Big]. \tag{71}$$

Continuant à dériver, on obtient les fonctions polygammas

$$\psi^{(r)}(v) = \partial_v^{r+1} \log \Gamma(v), \tag{72}$$

d'où

$$\zeta(r;v) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\psi^{(r-1)}(v) \qquad \text{pour } r = 1, 2, \ldots \tag{73}$$

et en particulier $\psi(v) = -\zeta(1;v)$. La fonction ψ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\psi(v+1) = \psi(v) + \frac{1}{v} \tag{74}$$

(reflet de $\Gamma(v+1) = v\Gamma(v)$), mais aussi

$$\psi(1-v) - \psi(v) = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi v}\,, \tag{75}$$

reflet de la formule des compléments

$$\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin \pi v}\,. \tag{76}$$

En fait, la fonction $\psi(v)$ sert de série génératrice aux nombres $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$; de la formule (73), on déduit en effet[11]

$$-\psi(1-v) = \gamma + \sum_{r=2}^{\infty} \zeta(r) v^{r-1}. \tag{77}$$

Sous forme exponentielle, on a

$$\Gamma(v+1) = \exp\Big[-\gamma v + \frac{\zeta(2)}{2}v^2 - \frac{\zeta(3)}{3}v^3 + \ldots\Big]. \tag{78}$$

Exercice : Retrouver la formule (54) à partir de (74), (75) et (77).

En conclusion, un exposé complet et détaillé pourrait partir des fonctions polylogarithmes $Li_s(z)$, puis en déduire la fonction d'Hurwitz par la formule (60), la fonction gamma $\Gamma(s)$ par (67), et enfin les fonctions polygammas $\psi^{(r)}(v)$ par (73).

[11]Noter qu'ici aussi γ joue le rôle de $\zeta(1)$.

2. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES NOMBRES POLYZÊTAS

2.1. L'histoire racontée jusqu'à présent est ancienne, puisque nous avons voulu montrer qu'elle était essentiellement connue d'Euler. Ce que nous décrivons maintenant a à peine dix ans d'âge. Les séries polylogarithmiques les plus générales, et les constantes associées, étaient connues de Jean Écalle [B1] vers 1980, dans sa théorie des « moules », bien avant que les spécialistes de théorie des nombres ne s'intéressent activement au dilogarithme, puis aux polylogarithmes $Li_k(z)$ (voir [B9]). Les constantes $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ remontent sans aucun doute à Euler dans le cas $r = 2$, mais sont mentionnées explicitement par Hoffman [B6] et Zagier [B4] vers 1990. Pour les contacts avec la physique mathématique, voir la conclusion. Je citerai les autres contributions au cours du développement.

Une remarque sur la terminologie. Les nombres $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ sont appelés diversement : « nombres multizêtas » (Écalle), « multiple zeta values » (en abrégé MZV) par Zagier, « nombres d'Euler-Zagier » par les frères Borwein, « multiple harmonic sums » par Hoffman. À la suggestion de Christophe Soulé, et pour satisfaire aux principes d'André Weil(12), nous les appelons « polyzêtas » (pour ajouter à la confusion !).

2.2. Voici leur définition. Pour une suite $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ d'entiers, on pose

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{(n)} \frac{1}{n_1^{k_1} \ldots n_r^{k_r}}, \tag{79}$$

où la sommation est étendue aux systèmes (n) d'entiers satisfaisant à $n_1 > \ldots > n_r > 0$ (convention d'Hoffman, opposée à celle de Zagier). Les entiers $k_1, \ldots, k_r$ satisfont à

$$k_1 \geq 2\ ,\ \ k_2 \geq 1, \ldots, k_r \geq 1\,,$$

la restriction sur k_1 étant nécessaire pour la convergence de la série. Le nombre $r \geq 1$ est la *longueur* (ou profondeur) et le *poids* est l'entier $|\mathbf{k}| = k_1 + \ldots + k_r$. En combinatoire, une suite $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ d'entiers strictement positifs s'appelle une « composition » de $|\mathbf{k}|$, le mot « partition » étant réservé aux suites telles que $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r$.

On peut chercher à interpoler au moyen d'une fonction polyzêta

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{(n)} n_1^{-s_1} \ldots n_r^{-s_r}, \tag{80}$$

la série étant absolument convergente si et seulement si l'on a

$$\mathrm{Re}(s_1 + \ldots + s_i) > i \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

(12) André Weil, à la suite de Dumézil, refusait les mélanges abusifs de racines grecques et latines, et fit appliquer strictement ce principe par Bourbaki.

Pour étendre le domaine d'analyticité, un calcul analogue à celui qui donne $\Gamma(s)\zeta(s)$ (*cf.* (42)), conduit à

$$\Gamma(s_1)\dots\Gamma(s_r)\zeta(s_1,\dots,s_r) = \int_0^\infty\dots\int_0^\infty t_1^{s_1-1}\dots t_r^{s_r-1}F(t_1,\dots,t_r)\,dt_1\dots dt_r\,; \tag{81}$$

la fonction $F(t_1,\dots,t_r)$ vaut $\sum_{(n)} u_1^{n_1}\dots u_r^{n_r}$ avec $u_i = e^{-t_i}$, d'où

$$F(t_1,\dots,t_r) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{e^{t_1+\dots+t_i}-1}. \tag{82}$$

Par la méthode de développement limité utilisée au n° 1.5, on peut montrer que $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ est une fonction méromorphe des variables $s_1,\dots,s_r$ et trouver les pôles[13].

De manière précise, soit K un entier positif ; la fonction

$$H_K(s_1,\dots,s_r) = \zeta(s_1,\dots,s_r) - \sum_{k=0}^K \frac{B_k}{k!}\frac{\Gamma(s_1+k+1)}{\Gamma(s_1)}\zeta(s_1+s_2+k-1,s_3,\dots,s_r) \tag{83}$$

est holomorphe là où l'on a $\mathrm{Re}(s_1+\dots+s_i) > i-K-1$ pour $2\le i\le r$. Les pôles de $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ sont donc situés le long des hyperplans $s_1=1$ et $s_1+\dots+s_i = i-n$, avec $2\le i\le r$ et $n\ge 0$.

On peut se demander ce qu'ont de spécial les sommes définissant $\zeta(k_1,\dots,k_r)$. Reformulons leur définition en

$$\zeta(k_1,\dots,k_r) = \sum_{\mathfrak{m}}\prod_{i=1}^r \frac{1}{(m_i+\dots+m_r)^{k_i}}, \tag{84}$$

la sommation étant étendue aux suites d'entiers strictement positifs $\mathfrak{m} = (m_1,\dots,m_r)$. Le type le plus général serait une série

$$S = \sum_{\mathfrak{m}} \frac{1}{P(m_1,\dots,m_r)}, \tag{85}$$

où le polynôme $P(x_1,\dots,x_r)$ est le produit de polynômes de degré 1 à coefficients rationnels, et où la sommation porte sur les entiers $m_1>0,\dots,m_r>0$ n'annulant pas $P(m_1,\dots,m_r)$. Dans certains cas, des propriétés de symétrie permettent de remplacer dans S la sommation par une sommation sur $\mathbb{Z}^r$; c'est le cas des séries (A) à (D) d'Euler données au n° 1.1, qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4m+1)^k}$$

[13] Résultat dû à Jean Écalle (non publié). Pour une preuve détaillée, voir Goncharov [C17], th. 2.25.

pour $k = 1, 2, 3, 4$ respectivement. Dans ce cas, Zagier [B4] suggère d'introduire la série de Fourier multiple

$$\sum_{\substack{\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r \\ P(\mathfrak{m})\neq 0}} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_rx_r)}}{P(m_1,\ldots,m_r)},$$

qui est une fonction sur $\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r$ rationnelle par morceaux(14) et d'y faire $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Le résultat est que $\pi^{-k}\sum_{\mathfrak{m}\in\mathbb{Z}^r} P(\mathfrak{m})^{-1}$ est un nombre rationnel si P est de degré $k \geq r$ (voir aussi les exemples donnés par Zagier [B4], page 507).

2.3. On a déjà défini les *fonctions polylogarithmes d'exposant complexe* s par la série

$$Li_s(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^s}, \tag{86}$$

de rayon de convergence 1. Une manipulation simple donne la formule

$$Li_s(z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \frac{(\log\, u)^{s-1}du}{u(u-z)}, \tag{87}$$

qui est la forme standard d'une fonction holomorphe dans le plan complexe P coupé le long de $[1, +\infty[$. On récupère ensuite la fonction ζ par $\zeta(s) = Li_s(1)$, en passant à la limite $z \in P$, $z \to 1$.

Pour les sommes multiples, on pose par analogie

$$Li_{s_1,\ldots,s_r}(z_1,\ldots,z_r) = \sum_{\mathfrak{m}} \prod_{i=1}^r \frac{z_i^{m_i}}{(m_i+\ldots+m_r)^{s_i}} \tag{88}$$

avec la représentation intégrale

$$\begin{aligned} &Li_{s_1,\ldots,s_r}(z_1,\ldots,z_r) \\ &\quad = \Gamma(s_1)^{-1}\ldots\Gamma(s_r)^{-1}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty t_1^{s_1-1}\ldots t_r^{s_r-1}\,\Phi(t_1,\ldots,t_r)dt_1\ldots dt_r, \end{aligned} \tag{89}$$

la fonction Φ étant donnée par

$$\Phi(t_1,\ldots,t_r) = \prod_{i=1}^r \frac{z_i}{e^{t_1+\ldots+t_i} - z_i}. \tag{90}$$

Le prolongement analytique en les variables $s_1, \ldots, s_r$ se fait par la méthode classique (M. Riesz, J. Hadamard) d'intégration par parties dans l'intégrale (89). On en déduit que $Li_{s_1,\ldots,s_r}(z_1,\ldots,z_r)$ est définie pour toutes les valeurs complexes des s_i, et les z_i dans le plan P coupé le long de $[1, +\infty[$. Bien entendu, on a formellement

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r) = Li_{s_1,\ldots,s_r}(1,\ldots,1)\,; \tag{91}$$

(14) Exemple classique : les polynômes de Bernoulli ($k \geq 1$)

$$B_k(x) = -(2\pi i)^{-k}k!\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^k} \qquad \text{pour } 0 < x < 1.$$

le point $z_1 = \ldots = z_r = 1$ n'est pas dans le domaine d'holomorphie, mais dans son adhérence. Dans la suite, nous considérerons le cas particulier $z_1 = \ldots = z_r = z$, d'où

$$Li_{s_1,\ldots,s_r}(z) = \sum_{(n)} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}} \tag{92}$$

et donc $\zeta(s_1, \ldots, s_r) = Li_{s_1,\ldots,s_r}(1)$ (avec le passage à la limite usuel).

2.4. Faisons le lien avec les *fonctions symétriques*. Rappelons que celles-ci sont interprétées comme des séries formelles[15] en une infinité de variables $t_1, t_2, \ldots$, et qu'une base est formée des fonctions monomiales $M(a_1, \ldots, a_r)$ (pour toutes les partitions $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_r > 0$). Cette dernière est la somme de tous les monômes de la forme $t_{n_1}^{a_1} \ldots t_{n_r}^{a_r}$, avec $n_1, \ldots, n_r$ distincts ; en particulier, on a $\lambda_r = M(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r})$ et $\psi_r = M(r)$ avec les notations du n° 1.3.

Soit maintenant $(k_1, \ldots, k_r) = \mathbf{k}$ une composition, et posons

$$QM(\mathbf{k}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} t_{n_1}^{k_1} \ldots t_{n_r}^{k_r}. \tag{93}$$

Alors $M(a_1, \ldots, a_r)$ est la somme de tous les $QM(k_1, \ldots, k_r)$ correspondant à toutes les compositions $k_1, \ldots, k_r$ distinctes obtenues par permutation de $a_1, \ldots, a_r$. Les $QM(\mathbf{k})$ forment une base d'une algèbre QSym, plus large que l'algèbre Sym des fonctions symétriques[16].

Pour exprimer de manière commode la multiplication dans QSym, nous introduisons l'algèbre unifère associative libre $A\langle y_1, y_2, \ldots \rangle$ des polynômes non commutatifs en une autre série de variables $y_1, y_2, \ldots$. Selon Hoffman, on note $\mathfrak{h}^1$ le module correspondant, ayant pour base les « mots » $w = y_{k_1} \ldots y_{k_r}$. Par récurrence, on définit la multiplication $*$ dans $\mathfrak{h}^1$ par le fait que 1 est élément unité et que

$$y_k w * y_{k'} w' = y_{k+k'}(w * w') + y_k(w * y_{k'} w') + y_{k'}(y_k w * w'). \tag{94}$$

Elle est associative et commutative, et l'on note $\mathfrak{h}^1_{har}$ l'algèbre correspondante. La correspondance

$$y_{k_1} \ldots y_{k_r} \longleftrightarrow QM(k_1, \ldots, k_r)$$

sur les bases se prolonge en un *isomorphisme d'algèbres de* $\mathfrak{h}^1_{har}$ sur QSym.

Les mots 1 et $y_{k_1} \ldots y_{k_r}$ avec $k_1 \geq 2$ forment une base d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}^0_{har}$ de $\mathfrak{h}^1_{har}$. Le nombre polyzêta $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ résulte alors de la substitution $t_n \longleftarrow \frac{1}{n}$ dans la fonction quasi-symétrique $QM(k_1, \ldots, k_r)$. On en déduit (pour $A = \mathbb{R}$) un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

$$\widehat{\zeta} : \mathfrak{h}^0_{har} \longrightarrow \mathbb{R}$$

---

[15] Voir Bourbaki, Algèbre, chapitre 4, § 6, pour un exposé « moderne » (en 1981 !) de cette théorie.

[16] Nous prenons les coefficients dans un anneau commutatif A contenant le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels comme sous-anneau. Le plus souvent, on prendra A égal à $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

défini par

$$\widehat{\zeta}(y_{k_1}\dots y_{k_r}) = \zeta(k_1,\dots,k_r).$$

On veut prolonger $\widehat{\zeta}$ à tout $\mathfrak{h}^1_{har}$. Pour cela, on définit une dérivation D de $\mathfrak{h}^1_{har}$ par $D(1) = 0$ et

$$D(y_{k_1}\dots y_{k_r}) = \begin{cases} y_{k_2}\dots y_{k_r} & \text{si } k_1 = 1 \\ 0 & \text{si } k_1 \geq 2. \end{cases} \tag{95}$$

Alors, $\mathfrak{h}^0_{har}$ est le noyau de D, on a $D(y_1) = 1$ et tout élément de $\mathfrak{h}^1_{har}$ est annulé par une puissance de D. On en déduit un homomorphisme reg_* de $\mathfrak{h}^1_{har}$ sur $\mathfrak{h}^0_{har}$ par

$$\mathrm{reg}_*(u) = \sum_{i\geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} y_1^{*i} * D^i(u) \tag{96}$$

pour $u \in \mathfrak{h}^1_{har}$. On a $\mathrm{reg}_*(u) = u$ pour u dans $\mathfrak{h}^0_{har}$, $\mathrm{reg}_*(y_1) = 0$ et la formule de Taylor

$$u = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} y_1^{*i} * \mathrm{reg}_*(D^i u) \tag{97}$$

pour tout u dans $\mathfrak{h}^1_{har}$. On prolonge $\widehat{\zeta}$ en l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_* = \widehat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_*$ de $\mathfrak{h}^1_{har}$ dans $\mathbb{R}$, et l'on pose

$$\zeta_*(k_1,\dots,k_r) = \widehat{\zeta}_*(y_{k_1}\dots y_{k_r}). \tag{98}$$

Il revient au même de dire que $\mathfrak{h}^1_{har}$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $\mathfrak{h}^0_{har}[y_1]$, et que $\widehat{\zeta}_*$ est l'unique homomorphisme d'algèbres prolongeant $\widehat{\zeta}$ qui s'annule sur y_1.

Concrètement, le fait que $\widehat{\zeta}$ soit un homomorphisme d'algèbres se traduit par des identités telles que

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(a,b) + \zeta(b,a) \tag{99}$$

$$\zeta(a)\zeta(b,c) = \zeta(a+b,c) + \zeta(b,a+c) + \zeta(a,b,c) + \zeta(b,a,c) + \zeta(b,c,a). \tag{100}$$

On doit exclure $a = 1$ ou $b = 1$ dans ces formules. Les polyzêtas régularisés $\zeta_*(a)$, $\zeta_*(a,b)$,... satisfont sans restriction aux relations précédentes avec la convention $\zeta_*(1) = 0$. Par exemple de (99), on déduit pour $a = b = 1$

$$0 = \zeta_*(1)^2 = \zeta_*(2) + 2\zeta_*(1,1) \tag{101}$$

et comme $\zeta_*(2) = \zeta(2)$, on a

$$\zeta_*(1,1) = -\frac{1}{2}\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}. \tag{102}$$

Utilisant la relation (22) de Newton sous la forme

$$\sum_{r\geq 0} \lambda_r t^r = \exp\Big(\sum_{r\geq 1} (-1)^{r-1} \psi_r\, t^r/r\Big), \tag{103}$$

on obtient les séries génératrices

$$\sum_{r\geq 0}\zeta_*(\underbrace{1,\ldots,1}_{r})t^r=\exp\Big(\sum_{r\geq 2}(-1)^{r-1}\zeta(r)\,t^r/r\Big). \tag{104}$$

Par un calcul analogue, on obtient, pour $k\geq 2$, la relation

$$\sum_{r\geq 0}\zeta(\underbrace{k,\ldots,k}_{r})t^r=\exp\Big(\sum_{r\geq 1}(-1)^{r-1}\zeta(kr)\,t^r/r\Big)\,; \tag{105}$$

le cas particulier $k=2$ était substantiellement connu d'Euler (voir le n° 1.3). Donnons aussi une série génératrice due à Granville et Zagier, et démontrée par d'autres méthodes

$$\sum_{r\geq 0}\zeta(\underbrace{3,1,3,1,\ldots,3,1}_{r})t^{4r}=\frac{\mathrm{ch}(\pi t)-\cos\pi t}{\pi^2t^2}, \tag{106}$$

d'où la formule

$$\zeta(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{r})=\frac{2\pi^{4r}}{(4r+2)!} \tag{107}$$

découverte expérimentalement par Zagier [B4].

2.5. Pour tout entier $k\geq 0$, notons $\mathcal{Z}_k$ le sous-espace $\mathbb{Q}$-vectoriel de $\mathbb{R}$ engendré par les polyzêtas de poids k. Les formules de multiplication décrites au n° 2.4 entraînent $\mathcal{Z}_k\,.\,\mathcal{Z}_{k'}\subset\mathcal{Z}_{k+k'}$. En particulier, on a $\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_1=0$, $\mathcal{Z}_2=\mathbb{Q}\pi^2$. On introduit une algèbre graduée

$$\mathcal{Z}=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k.$$

Zagier a fait les deux conjectures suivantes :

(C1) *La somme des sous-espaces $\mathcal{Z}_k$ de $\mathbb{R}$ est directe, c'est-à-dire que $\mathcal{Z}$ se plonge dans $\mathbb{R}$.*

Noter que ceci entraîne que les nombres $\zeta(2),\zeta(3),\ldots$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, que $\zeta(3)$ est irrationnel, que π est transcendant,...

(C2) *Soit d_k la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{Z}_k$. On a la relation de récurrence*

$$d_k=d_{k-2}+d_{k-3} \tag{108}$$

pour $k\geq 3$.

Vu les conditions initiales $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=1$, ceci se traduit par la série génératrice

$$\sum_{k\geq 0}d_kt^k=\frac{1}{1-t^2-t^3}. \tag{109}$$

Soit c l'unique nombre réel tel que $c^3 = c + 1$, d'où $c = 1,32...$ Sous l'hypothèse précédente, on aurait $d_k \sim 0,41 \times (1,32)^k$, alors que le nombre de compositions admissibles de poids k est 2^{k-2}. Voici une table :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4.

On peut préciser la conjecture (108). L'algèbre $\mathcal{Z}$ est graduée par le poids, mais filtrée par la longueur, $F^\ell \mathcal{Z}_k$ désignant le sous-espace engendré sur $\mathbb{Q}$ par les polyzêtas de poids k et longueur $\leq \ell$. Notons $d_{k,\ell}$ la dimension de l'espace $F^\ell \mathcal{Z}_k / F^{\ell-1}\mathcal{Z}_k$Č : selon Broadhurst, on conjecture

$$\left(\sum d_{k,\ell} t^k u^\ell\right)^{-1} = 1 - t^2 - t^3 + \frac{tu^2(1-u^2)}{(1+t^2)(1-t^6)}, \tag{110}$$

formule dont Écalle a donné une interprétation dans [B3]. Toutes ces conjectures sont fondées sur une vaste exploration numérique. On calcule les valeurs des polyzêtas avec plusieurs centaines de décimales, puis on teste les possibles relations linéaires à coefficients entiers par l'algorithme LLL [B22] ou ses variantes plus modernes.

2.6. Un autre type de relations s'obtient au moyen d'une représentation intégrale des polyzêtas. À partir de la définition (92) des fonctions polylogarithmes, on obtient les formules de différentiation

$$dLi_{k_1,\ldots,k_r} = \begin{cases} \omega_0 \, Li_{k_1-1,k_2,\ldots,k_r} & \text{si } k_1 \geq 2 \\ \omega_1 \, Li_{k_2,\ldots,k_r} & \text{si } k_1 = 1 \end{cases} \tag{111}$$

avec les formes différentielles

$$\omega_0 = dz/z \qquad \omega_1 = dz/(1-z). \tag{112}$$

Pour simplifier l'écriture, nous évaluerons les fonctions polylogarithmes sur l'intervalle réel $[0,1[$. Rappelons la définition des intégrales itérées de Chen [A12]. Si α et β sont deux formes différentielles sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et x_0 un point de J, on pose $\alpha \circ \beta = \alpha \, . \, f$, où f est la primitive de β, i.e. $df = \beta$, avec $f(x_0) = 0$. Les intégrales de Chen sont de la forme $\int_{x_0}^{x_1} \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_r$ (produit associé de droite à gauche $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ (\alpha_3 \circ \ldots \circ (\alpha_{r-1} \circ \alpha_r) \ldots)))$ et s'évaluent par l'intégrale de $\alpha_1(t_1) \ldots \alpha_r(t_r)$ sur le simplexe Δ^r défini dans $\mathbb{R}^r$ par

$$x_1 > t_1 > \ldots > t_r > x_0$$

(au moins si $x_0 < x_1$).

La formule (111) s'interprète alors sous la forme

$$Li_{k_1,\ldots,k_r}(x) = \int_0^x \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_k \qquad (k = k_1 + \ldots + k_r), \tag{113}$$

avec la règle suivante : si i est l'une des sommes partielles $k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+\ldots+k_r$, on pose $\alpha_i = \omega_1$ et sinon on pose $\alpha_i = \omega_0$. Interprétation combinatoire : notons $\mathfrak{h}$ l'espace des polynômes non-commutatifs en deux variables x_0 et x_1 ; on peut alors plonger $\mathfrak{h}^1$ dans $\mathfrak{h}$ en remplaçant y_k par $x_0^{k-1}x_1$, c'est-à-dire

$$y_{k_1} \ldots y_{k_r} = x_0^{k_1-1}x_1 \ldots x_0^{k_r-1}x_1. \tag{114}$$

Si l'on écrit ce mot sous la forme $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ on aura

$$Li_{k_1,\ldots,k_r}(x) = \int_0^x \omega_{i_1} \circ \ldots \circ \omega_{i_k}. \tag{115}$$

Mais on dispose d'une formule de multiplication des intégrales itérées sous la forme

$$\Big(\int_0^x \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_k\Big)\Big(\int_0^x \alpha_{k+1} \circ \ldots \circ \alpha_{k+\ell}\Big) = \sum_{\omega \in S_{k,\ell}} \int_0^x \alpha_{\omega^{-1}(1)} \circ \ldots \circ \alpha_{\omega^{-1}(k+\ell)} \tag{116}$$

en notant $S_{k,\ell}$ l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $1, 2, \ldots, k+\ell$ qui sont strictement croissantes sur les sous-intervalles $1, 2, \ldots, k$ et $k+1, k+2, \ldots, k+\ell$. Cela suggère l'introduction d'un produit de mélange (appelé aussi « shuffle » en anglais) sur $\mathfrak{h}$ par

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k} ⧢ x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_{k+\ell}} = \sum_{\omega \in S_{k,\ell}} x_{i_{\omega^{-1}(1)}} \ldots x_{i_{\omega^{-1}(k+\ell)}}. \tag{117}$$

On obtient ainsi une algèbre associative et commutative, notée $\mathfrak{h}_{sh}$, dont $\mathfrak{h}^0$ et $\mathfrak{h}^1$ sont des sous-algèbres notées $\mathfrak{h}^0_{sh}$ et $\mathfrak{h}^1_{sh}$ respectivement. On peut résumer la discussion comme suit : *il existe un homomorphisme d'algèbres*[17] $Li : \mathfrak{h}^1_{sh} \to \mathcal{H}$, *où* $\mathcal{H}$ *désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur* $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty[$.

Par un argument analogue à celui du n°2.4, on montre que $\mathfrak{h}_{sh}$ est l'algèbre de polynômes $\mathfrak{h}^1_{sh}[x_0]$ et l'on étend Li en un homomorphisme de $\mathfrak{h}_{sh}$ dans $\mathcal{H}$ qui applique x_0 sur la primitive $\log z$ de $\omega_0 = dz/z$. Noter que Li applique x_1 sur $\int_0^z \omega_1 = -\log(1-z) = Li_1(z)$. Or il se trouve que l'opérateur D défini par (95) est une dérivation pour le produit $⧢$, d'où une projection $\mathrm{reg}_{⧢}$ de $\mathfrak{h}^1_{sh}$ sur $\mathfrak{h}^0_{sh}$. Comme on a $\widehat{\zeta}(u) = Li(u)(1)$ pour $u \in \mathfrak{h}^0$, on peut prolonger $\widehat{\zeta}$ en un homomorphisme $\widehat{\zeta}_{⧢} = \widehat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_{⧢}$ de $\mathfrak{h}^1_{sh}$ dans $\mathbb{R}$, d'où une régularisation $\zeta_{⧢}(k_1, \ldots, k_r)$ des polyzêtas divergents (i.e. avec $k_1 = 1$). La projection $\mathrm{reg}_{⧢}$ annule $y_1 = x_1$, d'où $\zeta_{⧢}(1) = 0$; mais on a $x_1 ⧢ \ldots ⧢ x_1 = r!\, x_1^r$, d'où

$$\zeta_{⧢}(1, \ldots, 1) = 0, \tag{118}$$

et en particulier $\zeta_{⧢}(1,1) = 0$, alors qu'on a $\zeta_*(1,1) = -\pi^2/12$.

2.7. Résumons la situation. Sur l'espace $\mathfrak{h}^1$, nous avons défini deux produits $*$ et $⧢$, et $\mathfrak{h}^0$ est stable pour chacun d'eux. De plus, l'application linéaire $\widehat{\zeta}$ de $\mathfrak{h}^0$ dans $\mathbb{R}$ définie par

[17] On peut prendre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour anneau des scalaires.

$\widehat{\zeta}(y_{k_1}\dots y_{k_r}) = \zeta(k_1,\dots,k_r)$ (prendre $\mathbb{R}$ pour anneau des scalaires) est un homomorphisme pour les deux produits $*$ et $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathfrak{h}^0$, d'où deux familles de relations quadratiques satisfaites par les polyzêtas $\zeta(k_1,\dots,k_r)$. On étend ensuite $\widehat{\zeta}$ en deux homomorphismes

$$\widehat{\zeta}_* : \mathfrak{h}^1_{har} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup} : \mathfrak{h}^1_{sh} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{119}$$

caractérisés par $\widehat{\zeta}_*(y_1) = \widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}(y_1) = 0$, c'est-à-dire $\zeta_*(1) = \zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1) = 0$.

On a vu que $\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(1,1)$ et $\zeta_*(1,1)$ sont différents, et il s'agit de déterminer la relation exacte entre $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\widehat{\zeta}_*$. Par définition, on a

$$\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup} = \varepsilon \circ Z_{\sqcup\!\sqcup} \quad , \quad \widehat{\zeta}_* = \varepsilon \circ Z_* \tag{120}$$

où $\varepsilon : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}$ est l'homomorphisme $\varepsilon(P) = P(0)$, et où $Z_{\sqcup\!\sqcup} : \mathfrak{h}^1_{sh} \to \mathbb{R}[T]$ et $Z_* : \mathfrak{h}^1_{har} \to \mathbb{R}[T]$ sont les homomorphismes d'algèbres prolongeant $\widehat{\zeta}$ et appliquant y_1 sur T. Le résultat principal[18] est le suivant : *il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire bijective ρ de $\mathbb{R}[T]$ dans lui-même telle que $Z_{\sqcup\!\sqcup} = \rho \circ Z_*$*. Il revient au même de dire que le noyau I de $\widehat{\zeta}$, qui est un idéal à la fois dans $\mathfrak{h}^0_{sh}$ et $\mathfrak{h}^0_{har}$, engendre le même idéal dans les algèbres $\mathfrak{h}^1_{sh}$ et $\mathfrak{h}^1_{har}$.

Pour la démonstration, on utilisera l'homomorphisme $Li : \mathfrak{h}^1_{sh} \to \mathcal{H}$, qui transforme u en la fonction $Li(u|z)$. Identifiant $\mathfrak{h}^1_{har}$ à QSym, soit $\widehat{\zeta}_N$ l'homomorphisme

$$u \longmapsto u\Big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{N}, 0, 0, 0 \dots\Big)$$

de QSym dans $\mathbb{R}$. Si $Li(u|z) = \sum_{n\geq 0} a_n(u) z^n$, on a $\widehat{\zeta}_N(u) = \sum_{n=0}^N a_n(u)$. Par la formule d'Euler-MacLaurin, on établit un développement asymptotique

$$\widehat{\zeta}_N(u) \sim \sum_{i\geq 0} P_{i,u}(\log\, N) N^{-i} \tag{121}$$

avec des polynômes $P_{0,u}, P_{1,u}$,... Lorsque $u = y_1$, on a $\widehat{\zeta}_N(u) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \sim \gamma + \log\, N$ (γ est la constante d'Euler), et donc

$$Z_*(u) = P_{0,u}(T - \gamma). \tag{122}$$

On calcule de même $Z_{\sqcup\!\sqcup}$ par la formule

$$Z_{\sqcup\!\sqcup}(u) = Q_{0,u}(T)\,, \tag{123}$$

où $Q_{0,u}(T)$ apparaît dans le développement asymptotique

$$Li(u|1-\varepsilon) \sim \sum_{i\geq 0} Q_{i,u}(-\log\, \varepsilon)\varepsilon^i \tag{124}$$

pour $\varepsilon > 0$ tendant vers 0. Par suite, le noyau de Z_* se compose des u tels que la série $Li(u|z) = \sum_{n\geq 0} a_n(u) z^n$ satisfasse à $\lim_{N\to\infty}(a_0(u) + \dots + a_N(u)) = 0$ et le noyau de

[18] Dû à Zagier et Boutet de Monvel. On en trouvera une démonstration détaillée dans l'article d'Ihara et Kaneko [B20] et dans la thèse de Racinet [C8].

$Z_{ш}$ est caractérisé par $\lim_{z\to 1} Li(u|z) = 0$. Par le lemme d'Abel, le noyau de Z_* est contenu dans celui de $Z_{ш}$, et l'on peut factoriser $Z_{ш}$ en $\rho \circ Z_*$.

Explicitons ρ. On a

$$\exp_{ш}(ay_1) = \sum_{r\geq 0} a^r\, y_1^r\,, \tag{125}$$

où l'exponentielle $\exp_{ш}$ est calculée pour le produit ш. Appliquant $Z_{ш}$, on obtient

$$\exp{(aT)} = Z_{ш}\Big(\sum_{r\geq 0} a^r\, y_1^r\Big). \tag{126}$$

Interprétons les éléments de $\mathfrak{h}^1_{har}$ en termes de fonctions quasi-symétriques ; alors y_1^r correspond à λ_r et y_r à ψ_r. D'après la formule de Newton (103), on a

$$\sum_{r\geq 0} a^r\, y_1^r = \exp_*(ay_1) \,*\, \exp_*\Big(\sum_{r\geq 2}(-1)^{r-1}\, a^r y_r/r\Big) \tag{127}$$

($\exp_*$ calculée pour le produit $*$). Appliquant Z_* qui transforme y_1 en T et y_r en $\zeta(r)$ pour $r \geq 2$, on trouve

$$Z_*\Big(\sum_{r\geqq 0} a^r\, y_1^r\Big) = \exp{(aT)}\,.\,\exp\Big(\sum_{r\geq 2}(-1)^{r-1}\zeta(r)a^r/r\Big)\,. \tag{128}$$

Comparant les formules (126) et (128), on conclut

$$\rho(\exp{(aT)}) = \exp{(aT)}\,.\,\exp\Big(\sum_{r\geq 2}(-1)^{r}\zeta(r)a^r/r\Big)\,, \tag{129}$$

ou, ce qui revient au même, ρ *est l'opérateur différentiel d'ordre infini*

$$\exp\Big(\sum_{r\geq 2}(-1)^{r}\zeta(r)\partial_T^r/r\Big).$$

En particulier, ρ est inversible.

2.8. La comparaison des deux régularisations conduit à de *nouvelles relations* entre les polyzêtas. Par exemple, pour tout u dans $\mathfrak{h}^0$, l'élément $u - \widehat{\zeta}(u)\,.\,1$ de $\mathfrak{h}^0$ appartient au noyau I de $\widehat{\zeta}$. Comme I engendre le même idéal J dans les algèbres $\mathfrak{h}^1_{har}$ et $\mathfrak{h}^1_{sh}$, les éléments $y_1 * u - \widehat{\zeta}(u)y_1$ et $y_1 ш\, u - \widehat{\zeta}(u)y_1$ de $\mathfrak{h}^1$ appartiennent tous deux à J. Leur différence appartient donc à $J \cap \mathfrak{h}^0 = I$, d'où

$$\widehat{\zeta}(y_1 * u - y_1 ш\, u) = 0 \qquad (\text{pour } u \in \mathfrak{h}^0). \tag{130}$$

En explicitant, on trouve la relation d'Hoffman [B6]

$$\sum_{i=1}^{r} \zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\ldots,k_r) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=2}^{k_i} \zeta(k_1,\ldots,k_{i-1},j,k_i+1-j,k_{i+1},\ldots,k_r)\,, \tag{131}$$

où une somme de polyzêtas de longueur r est égale à une somme de polyzêtas de longueur $r+1$.

Cette formule est un cas particulier d'une formule générale qui s'écrit sous forme compacte $\widehat{\zeta}(\partial_n(u)) = 0$ pour tout u dans $\mathfrak{h}^0$; l'opérateur ∂_n est défini par

$$\partial_n(x_0) = \sum_{|w|=n-1} x_0\, w\, x_1 = -\partial_n(x_1) \tag{132}$$

(somme étendue à tous les mots w de poids $n-1$), et

$$\partial_n(x_{i_1}\dots x_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} x_{i_1}\dots x_{i_{j-1}}\partial_n\Big(x_{i_j}\Big)x_{i_{j+1}}\dots x_{i_r}. \tag{133}$$

Kaneko, Ohno, Ihara et Hoffman ont prouvé récemment de nombreuses relations linéaires entre polyzêtas. La plus générale est celle d'Ohno [B21].Pour une composition $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$, la composition duale $\mathbf{k}' = (k'_1, \dots, k'_{r'})$ est décrite ainsi : si

$$\mathbf{k} = \Big(a_1+1, \underbrace{1,\dots,1}_{b_1-1}, a_2+1, \underbrace{1,\dots,1}_{b_2-1}, \dots\Big)$$

avec $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s$ strictement positifs, on obtient $\mathbf{k}'$ en remplaçant $a_1, b_1, \dots, a_s, b_s$ par $b_s, a_s, b_{s-1}, a_{s-1}, \dots, b_1, a_1$. On a

(134)
$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta^{2s}} \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{(a_i-1)!}\log^{a_i-1}\left(\frac{t_{2i-2}}{t_{2i-1}}\right)\frac{1}{(b_i-1)!}\log^{b_i-1}\left(\frac{1-t_{2i}}{1-t_{2i-1}}\right)\frac{dt_{2i-1}}{t_{2i-1}}\,\frac{dt_{2i}}{1-t_{2i}},$$

où le domaine d'intégration Δ^{2s} est défini par les inégalités $1 = t_0 > t_1 > \dots > t_{2s} > 0$; c'est le cas particulier $x = 1$ de la formule (115). *La formule de dualité* $\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}')$ se déduit de (134) par le changement de variables

$$t'_1 = 1 - t_{2s}\,,\ t'_2 = 1 - t_{2s-1}\,,\dots\ t'_{2s} = 1 - t_1.$$

La formule d'Ohno s'écrit

$$\sum_{e_1+\dots+e_r=\ell} \zeta(k_1+e_1, \dots, k_r+e_r) = \sum_{e'_1+\dots+e'_{r'}=\ell} \zeta(k'_1+e'_1, \dots, k'_{r'}+e_{r'}) \tag{135}$$

pour $\ell \geq 0$. La formule de dualité est le cas particulier $\ell = 0$ et la formule d'Hoffman (131) résulte des cas $\ell = 0$ et $\ell = 1$. On déduit aussi de (135) que pour k et r fixés, avec $2 \leq r < k$, la somme des polyzêtas $\zeta(\mathbf{k})$, avec $\mathbf{k}$ de poids k et de longueur r, est égale à $\zeta(k)$; par exemple

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)\ ,\ \zeta(4) = \zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(2,1,1).$$

Il est généralement postulé, sur la base d'expériences numériques, que nous connaissons déjà toutes les relations à coefficients entiers entre polyzêtas de même poids, mais l'analyse des implications logiques entre les identités connues n'est pas achevée. Nous reviendrons là-dessus au n° 3.6.

3. SÉRIES GÉNÉRATRICES NON COMMUTATIVES

3.1. Nous voulons maintenant étudier plus en profondeur les relations entre les polyzêtas qui sont polynomiales sur $\mathbb{Q}$. L'outil utilisé est celui des séries formelles non commutatives et des algèbres de Hopf.

Soit $H = \oplus_{n\geq 0} H_n$ une algèbre (associative et unifère) graduée sur le corps $\mathbb{Q}$. On suppose qu'on a $H_0 = \mathbb{Q}$ et que chaque espace H_n est de dimension finie[19]. Un coproduit est un homomorphisme d'algèbres graduées Δ de H dans $H \otimes H$; on le suppose *coassociatif*, c'est-à-dire que les homomorphismes $(H \otimes \Delta) \circ \Delta$ et $(\Delta \otimes H) \circ \Delta$ de H dans $H \otimes H \otimes H$ sont égaux. On note ε la projection de H sur $\mathbb{Q} = H_0$ et l'on suppose que c'est une counité pour Δ. Alors (H, Δ, ε) est une algèbre de Hopf graduée.

Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre. Sur l'ensemble $L = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H, A)$ des applications $\mathbb{Q}$-linéaires de H dans A, on définit classiquement le produit de convolution $f * f' = m_A \circ (f \otimes f') \circ \Delta$, où $m_A : A \otimes A \to A$ est la multiplication de A. Ce produit est bilinéaire et associatif et admet ε pour unité. Supposons désormais les algèbres H et A *commutatives*. Dans L, l'ensemble des homomorphismes (unifères) d'algèbres de H dans A est un groupe $G(A)$ pour le produit $*$. De même, l'ensemble $\mathcal{G}(A)$ des $\xi \in L$ satisfaisant à $\xi(xy) = \varepsilon(x)\xi(y) + \xi(x)\varepsilon(y)$ est une algèbre de Lie pour le crochet

$$[\xi, \eta] = \xi * \eta - \eta * \xi. \tag{136}$$

Notons $H^+ = \oplus_{n\geq 1} H_n$ le noyau de ε ; c'est un idéal gradué de H. Notons aussi $Q(H)$ l'espace vectoriel gradué $H^+/H^+ . H^+$, d'où un isomorphisme d'espaces $\mathbb{Q}$-vectoriels de $\mathcal{G}(A)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Q(H), A)$. L'exponentielle $\exp_*$ définie par

$$\exp_*(\xi) = \sum_{r\geq 0} \underbrace{\xi * \ldots * \xi}_{r} / r! \tag{137}$$

est une bijection de $\mathcal{G}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Q(H), A)$ sur $G(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg}}(H, A)$. Comme elle est fonctorielle par rapport à A, on en déduit un *isomorphisme d'algèbres commutatives graduées de* $\mathrm{Sym}(Q(H))$ *sur* H. En d'autres termes, H *est isomorphe à une algèbre de polynômes* (« théorème de Milnor-Moore »).

3.2. Faisons de l'algèbre de mélange $\mathfrak{h}_{sh}$ une algèbre de Hopf graduée. Comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, elle admet pour base les mots $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ en deux lettres x_0 et x_1. On introduit deux autres variables non commutatives X_0 et X_1 et l'on suppose qu'on a $x_i X_j = X_j x_i$. On fait la convention que, pour $w = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, on a $W = X_{i_1} \ldots X_{i_k}$ (passage en majuscules). On introduit la « série double »

$$\Phi = \sum_{w} wW = \sum_{k\geq 0} \sum_{i_1,\ldots,i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k} X_{i_1} \ldots X_{i_k}. \tag{138}$$

[19] On peut remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps de caractéristique 0, disons $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit alors $f : \mathfrak{h} \to A$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire, où A est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative ; on lui associe la série génératrice $D^f_{\sqcup\!\sqcup} = \sum_w f(w)W$ dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$.

Considérons maintenant le produit $\sqcup\!\sqcup$ dans $\mathfrak{h}$; on peut définir un coproduit $\Delta : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ par

$$\Delta\Big(x_{i_1} \ldots x_{i_k}\Big) = \sum_{\ell=1}^{k-1} x_{i_1} \ldots x_{i_\ell} \otimes x_{i_{\ell+1}} \ldots x_{i_k} + 1 \otimes x_{i_1} \ldots x_{i_k} + x_{i_1} \ldots x_{i_k} \otimes 1. \tag{139}$$

Il est compatible avec le produit $\sqcup\!\sqcup$, d'où une algèbre de Hopf commutative graduée $\mathfrak{h}_{sh}$. L'algèbre $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ des polynômes non commutatifs en X_0 et X_1 est graduée, X_0 et X_1 étant de degré 1. On considère $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ comme le dual gradué de $\mathfrak{h}$, les bases $\{w\}$ et $\{W\}$ étant en dualité. Le coproduit dans $\mathfrak{h}_{sh}$ est dual du produit usuel (concaténation) dans $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ et le produit $\sqcup\!\sqcup$ se dualise en un coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$. Le coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est l'unique homomorphisme d'algèbres de $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ dans $\mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ qui envoie X_i sur $X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i$. Appliquons les constructions du n° 3.1 à l'algèbre de Hopf graduée commutative $H = \mathfrak{h}_{sh}$. Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A, le groupe $G(A)$ se compose des séries formelles non commutatives g dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ qui satisfont à $\Delta_{\sqcup\!\sqcup} g = g \otimes g$; l'algèbre de Lie $\mathcal{G}(A)$ est la complétée de l'algèbre de Lie libre sur A engendrée par X_0 et X_1, et l'exponentielle définie par (137) est l'exponentielle usuelle des séries formelles. On écrit $G_{\sqcup\!\sqcup}$ et $\mathcal{G}_{\sqcup\!\sqcup}$ pour G et $\mathcal{G}$ respectivement.

3.3. Nous reformulons la définition des fonctions polylogarithmes donnée au n° 2.6. On note P le plan $\mathbb{C}$ coupé le long de $]-\infty, 0]$ et de $[1, +\infty[$. Comme c'est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, l'intégrale de Cauchy $\int_{z_0}^{z_1} \alpha$ d'une forme différentielle $\alpha = F(z)dz$ est bien définie, et l'on peut reprendre la définition des intégrales itérées $\int_{z_0}^{z_1} \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_k$ (voir [A12]). À chaque mot w en x_0, x_1, on associe de manière unique la fonction polylogarithme $Li(w|z)$ par

$$Li(x_0^m|z) = \frac{1}{m!} \log^m z \tag{140}$$

$$Li(x_i w|z) = \int_0^z \omega_i \, Li(w|.) \tag{141}$$

pour tout mot $x_i w$ qui n'est pas une puissance de x_0 ; voir (112) pour la définition de ω_0 et ω_1.

On introduit maintenant les séries génératrices

$$Li(z) = \sum_w Li(w|z)W \tag{142}$$

$$\Gamma = \omega_0 X_0 + \omega_1 X_1. \tag{143}$$

La série $Li(z)$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

a) *Li est une application holomorphe (coefficient par coefficient) de P dans $\mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$;*

b) *on a l'équation différentielle $d\,Li = \Gamma \,.\, Li$;*

c) *l'application* $z \mapsto Li(z)\,.\,e^{-X_0 \log z}$ *a un prolongement holomorphe au voisinage de* $z = 0$*, avec la valeur* 1 *en ce point.*

Le lien avec les intégrales itérées s'écrit sous la forme

$$Li(z_1)\,.\,Li(z_0)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \int_{z_0}^{z_1} \underbrace{\Gamma \circ \ldots \circ \Gamma}_{k}, \tag{144}$$

avec l'interprétation évidente

$$\Gamma \circ \Gamma = \sum_{i,j} \omega_i \,\circ\, \omega_j \, X_i X_j$$

$$\Gamma \circ \Gamma \circ \Gamma = \sum_{i,j,k} \omega_i \,\circ\, \omega_j \,\circ\, \omega_k \, X_i X_j X_k, \mathit{etc.}$$

(voir la thèse de Gonzales-Lorca [C2]). On définit les évaluations $\alpha_{z_0}^{z_1} : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ par

$$\alpha_{z_0}^{z_1}(x_{i_1} \ldots x_{i_k}) = \int_{z_0}^{z_1} \omega_{i_1} \circ \ldots \circ \omega_{i_k} \tag{145}$$

et le second membre de (144) s'écrit sous la forme $\sum_w \alpha_{z_0}^{z_1}(w) W$. Les formes linéaires $\alpha_{z_0}^{z_1}$ sont des homomorphismes d'algèbres de $\mathfrak{h}_{sh}$ dans $\mathbb{C}$, qui permettent souvent de ramener un calcul analytique à un calcul dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{sh}$ avec le produit de mélange. Ceci est d'autant plus important que Minh et Petitot ont démontré dans [C7] que l'application Li de $\mathfrak{h}_{sh}$ dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur P est injective, c'est-à-dire que *les fonctions* $Li(w|z)$ *sont linéairement indépendantes sur le corps* $\mathbb{C}$ *des constantes.*

3.4. Il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}_{sh}$ sur $\mathfrak{h}_{sh}^0$ qui induit l'identité sur $\mathfrak{h}_{sh}^0$ et annule x_0 et x_1. Il prolonge l'homomorphisme $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ de $\mathfrak{h}_{sh}^1$ sur $\mathfrak{h}_{sh}^0$ défini au n° 2.6. On pose aussi $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup} = \widehat{\zeta} \circ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$. On peut construire explicitement $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$ par la formule

$$\sum_w \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\,.\,W = e^{-x_1 X_1}\,.\,\sum_w wW\,.\,e^{-x_0 X_0} \tag{146}$$

dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{sh}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ On définit la série génératrice des polyzêtas par

$$\Phi_{KZ} = \sum_w \widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}(w)\,.\,W\,; \tag{147}$$

elle est obtenue en appliquant l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_{\sqcup\!\sqcup}$ aux coefficients de la série double $\sum_w wW$ appartenant à $\mathfrak{h}_{sh}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$, et l'on a donc

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(\Phi_{KZ}) = \Phi_{KZ} \otimes \Phi_{KZ}\,, \tag{148}$$

c'est-à-dire que $\log \Phi_{KZ}$ *appartient à l'algèbre de Lie libre complétée sur* X_0 *et* X_1 (notée $\mathrm{Lie}(X_0, X_1)\hat{}$). La série Φ_{KZ} n'est autre que l'associateur de Knizhnik-Zamolodchikov défini par Drinfeld dans [C4] (voir aussi [A13]). On a

$$\lim_{z \to 0} Li(z)\,.\,e^{-X_0 \log z} = \lim_{z \to 0} e^{-X_0 \log z} Li(z) = 1. \tag{149}$$

Il résulte aussi de la formule (146) que l'on a

$$\lim_{z\to 1} e^{X_1 \log(1-z)} \,.\, Li(z) = \Phi_{KZ}. \tag{150}$$

L'application $z \mapsto 1-z$ de P dans P est holomorphe et involutive et transforme ω_0 en $-\omega_1$ et ω_1 en $-\omega_0$. Vu la caractérisation de Li par l'équation différentielle $d\,Li = \Gamma\,.\,Li$, on obtient

$$Li(1-z, X_0, X_1) = Li(z, -X_1, -X_0)\Phi_{KZ}(X_0, X_1) \tag{151}$$

en indiquant explicitement la dépendance des séries formelles non commutatives en X_0 et X_1. Vu les propriétés élémentaires du logarithme

$$\log(x + i0) = \log(x - i0) + 2\pi i \tag{152}$$

pour x réel strictement négatif, on obtient les formules de monodromie pour les polylogarithmes

$$Li(x + i0) = Li(x - i0)e^{2\pi i X_0} \qquad (x < 0) \tag{153}$$

$$Li(x + i0) = Li(x - i0)e^{2\pi i \mathfrak{m}} \qquad (x > 1) \tag{154}$$

avec

$$\mathfrak{m} = \Phi_{KZ}(X_0, X_1)^{-1} X_1 \Phi_{KZ}(X_0, X_1). \tag{155}$$

On retrouve en particulier les résultats classiques sur la monodromie des polylogarithmes $Li_k(z)$ (voir [B9]).

3.5. On peut répéter pour l'algèbre $\mathfrak{h}^1_{har}$ ce qui a été dit au n° 3.2 pour $\mathfrak{h}_{sh}$. On introduit donc la série double

$$D_* = \sum_{r\geq 0} \sum_{k_1,\ldots,k_r} y_{k_1} \ldots y_{k_r}\; Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} \tag{156}$$

avec les définitions $y_k = x_0^{k-1}x_1$, $Y_k = X_0^{k-1}X_1$ pour $k \geq 1$. La régularisation $\mathrm{reg}_* :$ $\mathfrak{h}^1_{har} \to \mathfrak{h}^0_{har}$ est donnée par la formule

$$\sum \mathrm{reg}_*(y_{k_1} \ldots y_{k_r})\; Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} = e^{-y_1 Y_1} D_* \tag{157}$$

dans l'algèbre $\mathfrak{h}_{har}\langle\langle Y_1, Y_2 \ldots\rangle\rangle$. Appliquant aux coefficients de D_* l'homomorphisme $\widehat{\zeta}_*$ de $\mathfrak{h}^1_{har}$ dans $\mathbb{R}$, on trouve la série génératrice

$$\Phi_* = \sum \zeta_*(k_1, \ldots, k_r)\; Y_{k_1} \ldots Y_{k_r} \tag{158}$$

dans $\mathbb{R}\langle\langle Y_1, Y_2, \ldots\rangle\rangle$. Le coproduit Δ dans $\mathfrak{h}$ défini par (139) applique $\mathfrak{h}^1$ dans $\mathfrak{h}^1 \otimes \mathfrak{h}^1$, et il est aussi compatible avec le produit $*$. On a donc une algèbre de Hopf commutative graduée $\mathfrak{h}^1_{har}$. On identifie son dual gradué à $\mathbb{Q}\langle \mathbf{Y}\rangle = \mathbb{Q}\langle Y_1, Y_2, \ldots\rangle$ comme algèbre, avec le coproduit Δ_* caractérisé par

$$\Delta_*(Y_k) = Y_k \otimes 1 + 1 \otimes Y_k + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j \otimes Y_{k-j}. \tag{159}$$

Comme $\widehat{\zeta_*}$ est un homomorphisme d'algèbres, on a

$$\Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_*. \tag{160}$$

Si l'on définit les éléments $U_1, U_2, \ldots$ de $\mathbb{Q}\langle \mathbf{Y}\rangle$ par

$$U_1 + U_2 + \ldots = \log(1 + Y_1 + Y_2 + \ldots), \tag{161}$$

la relation (160) signifie que $\log \Phi_*$ appartient à la sous-algèbre de Lie libre complétée construite sur les U_k (avec $\mathbb{R}$ pour anneau de coefficients).

Enfin, la comparaison des deux régularisations se traduit par la formule

$$\Phi_* = \exp\left\{\sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \zeta(n)\, Y_1^n/n\right\} . \Pi_Y(\Phi_{KZ}) \tag{162}$$

où la projection Π_Y de $\mathbb{Q}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ sur $\mathbb{Q}\langle\langle \mathbf{Y}\rangle\rangle$ annule tous les mots en X_0 et X_1 se terminant par X_0.

3.6. La conjecture la plus forte dans le sujet s'exprime en disant que *toutes les relations polynomiales sur* $\mathbb{Q}$ *entre les polyzêtas sont conséquence des relations établies précédemment* (148), (160) *et* (162), la série $\Phi_{KZ} - 1$ ne contenant que des termes de degré ≥ 2 en X_0, X_1.

De manière plus précise, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A, on note $DM(A)$ l'ensemble des séries formelles $\Phi \in A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$, de terme constant 1 et sans termes linéaires en X_0, X_1, satisfaisant aux relations

$$\Delta_{ш}(\Phi) = \Phi \otimes \Phi \quad , \quad \Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_* \tag{163}$$

où Φ_* est donnée par[20]

$$\Phi_* = \exp\left\{\sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} (\Phi|Y_n) Y_1^n/n\right\} . \Pi_Y(\Phi). \tag{164}$$

Alors Φ_{KZ} appartient à $DM(\mathbb{R})$ et même plus précisément peut être considérée comme un élément de $DM(\mathcal{Z})$ (voir le n° 2.5 pour la définition de $\mathcal{Z}$). La conjecture équivaut à la conjonction de (C1) énoncée au n° 2.5 et de ce qui suit :

(C3) *Pour toute* $\mathbb{Q}$*-algèbre commutative* A*, et pour toute série* Φ *dans* $DM(A)$*, il existe un homomorphisme d'algèbres* $\varphi : \mathcal{Z} \to A$ *et un seul tel que* Φ *se déduise de* Φ_{KZ} *en appliquant* φ *à chaque coefficient.*

[20] On note $(\Phi|Y_n)$ le coefficient de $Y_n = X_0^{n-1} X_1$ dans la série $\Phi(X_0, X_1)$.

3.7. Racinet vient de décrire en détail les ensembles $DM(A)$ dans sa thèse [C8]. Sa méthode est la suivante. On note $MT(A)$ le groupe formé des séries dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ dont le terme constant vaut 1, avec la multiplication

$$F_1 \circledast F_2 = F_1(F_2(X_0, X_1)X_0\, F_2(X_0, X_1)^{-1}, X_1)\, F_2(X_0, X_1). \tag{165}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{mt}(A)$ correspondante se compose des séries ψ sans terme constant dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$, avec le crochet défini par Ihara

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = d_{\psi_1}(\psi_2) - d_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2] \tag{166}$$

(on a noté d_ψ la dérivation continue de l'algèbre $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ qui applique X_0 sur 0 et X_1 sur $[\psi, X_1]$). Introduisons aussi l'application linéaire s_ψ dans $A\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ par

$$s_\psi(u) = \psi u - d_\psi(u). \tag{167}$$

On a alors les relations

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = s_{\psi_2}(\psi_1) - s_{\psi_1}(\psi_2) \tag{168}$$

$$s_{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle} = \left[s_{\psi_2}, s_{\psi_1} \right]. \tag{169}$$

Ces propriétés traduisent une situation bien connue en géométrie différentielle, celle des algèbres de Vinberg. L'application exponentielle de $\mathfrak{mt}(A)$ dans $MT(A)$ est la bijection donnée par

$$\exp^* \psi = (\exp\, s_\psi)(1). \tag{170}$$

Bien entendu, on pourrait décrire une algèbre de Hopf commutative graduée définissant, comme au n° 3.1, la famille des groupes $MT(A)$ et des algèbres de Lie $\mathfrak{mt}(A)$[(21)].

Notons $DM_0(A)$ l'ensemble des éléments de $DM(A)$ sans terme en $Y_2 = X_0X_1$ (de toute façon, un élément de $DM(A)$ n'a pas de termes linéaires en X_0, X_1). Le théorème principal de Racinet est le suivant :

a) *L'ensemble $DM_0(A)$ est un sous-groupe de $MT(A)$.*

b) *Pour Φ dans $DM(A)$ et H dans $DM_0(A)$, on a $\Phi \circledast H \in DM(A)$.*

On prouve ensuite qu'il existe un élément Φ dans $DM(\mathbb{Q})$ qui est pair, c'est-à-dire de la forme

$$\Phi = 1 + \Phi_2 + \Phi_4 + \ldots \tag{171}$$

où Φ_{2r} est un polynôme non commutatif de degré pair $2r$ en X_0 et X_1. Posons

$$\Phi(t) = 1 + t\Phi_2 + t^2\Phi_4 + \ldots . \tag{172}$$

Par ailleurs, soit $\mathfrak{dm}_0(A)$ l'algèbre de Lie correspondant à $DM_0(A)$. C'est l'ensemble des séries formelles ψ appartenant à l'algèbre de Lie libre complétée $\mathrm{Lie}_A(X_0, X_1)\hat{}$ et

(21) Le groupe $MT(A)$ est, à peu de choses près, le même que le groupe GARI d'Écalle, et l'algèbre de Lie $\mathfrak{mt}(A)$ s'identifie à l'algèbre ARI d'Écalle.

telles que $\Pi_Y(\psi)$ soit somme d'une série $\psi_{\mathrm{corr}}(Y_1)$ en Y_1, et d'un élément de l'algèbre de Lie libre complétée $\mathrm{Lie}_A(U_1, U_2, \ldots)\hat{}$; on impose enfin que le coefficient de Y_2 dans ψ soit nul. Le point technique le plus important de la démonstration consiste à prouver que $\mathfrak{dm}_0(A)$ décrit comme ci-dessus est stable par le crochet $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ de Ihara. Voici la dernière assertion du théorème de Racinet :

c) *L'application* $(t, \psi) \mapsto (\exp s_\psi)(\Phi(t))$ *de* $A \times \mathfrak{dm}_0(A)$ *dans* $DM(A)$ *est bijective.*

3.8. Nous terminons par une série de *problèmes ouverts.* Tout d'abord, le foncteur DM_0 qui à une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative A associe le groupe $DM_0(A)$ est un schéma en groupes pro-unipotent sur $\mathbb{Q}$. Cela signifie qu'il existe une algèbre de Hopf commutative graduée H sur le corps $\mathbb{Q}$, comme au n° 3.1, telle que $DM_0(A)$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de H dans A. D'après le théorème de Milnor-Moore, l'algèbre H est isomorphe à $\mathrm{Sym}(Q(H))$, le dual gradué de $Q(H)$ est une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{d}_0$ et l'algèbre de Hopf graduée duale de H est l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{d}_0)$. La série Φ_{KZ} permet de définir un homomorphisme d'algèbres $\tau : H \to \mathcal{Z}/\pi^2\mathcal{Z}$ (voir au n° 2.5 pour la définition de $\mathcal{Z}$) et la conjecture (C1)+(C3) équivaut à l'affirmation que τ est un isomorphisme et qu'il existe une dérivation D de degré -2 dans l'anneau gradué $\mathcal{Z}$, telle que $D(\zeta(2)) = 1$. La démonstration de Racinet permet en principe de construire D à partir d'un élément pair Φ de $DM(\mathbb{Q})$. *La construction explicite d'un tel* Φ *est un problème important.*

La conjecture de Zagier sur la dimension d_k de $\mathcal{Z}_k$ est conséquence d'une conjecture, due à Ihara et Deligne, qui affirme que l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_0$ est libre avec un générateur ψ_{2r+1} pour chacun des degrés impairs $2r + 1 = 3, 5, 7, \ldots$. La *construction explicite de tels éléments* $\psi_3, \psi_5, \ldots$ est un premier problème, *avant de prouver qu'ils engendrent librement* $\mathfrak{d}_0$.

On dispose d'une filtration par la longueur sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}_0$. Le gradué associé $\mathrm{gr}\, \mathfrak{d}_0$ est une algèbre de Lie bigraduée. Les travaux d'Écalle et Goncharov suggèrent que la composante de poids k et de longueur r de $\mathrm{gr}\, \mathfrak{d}_0$ s'identifie à l'espace des polynômes bialternaux : il s'agit des polynômes $P(v_1, \ldots, v_r)$ homogènes de degré $k - r$ qui satisfont à l'identité d'alternalité

$$\sum_{\omega \in S_{j,r-j}} P(v_{\omega(1)}, \ldots, v_{\omega(r)}) = 0 \tag{173}$$

pour $1 \leq j \leq r - 1$, ainsi que l'identité analogue pour le polynôme $P(v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{r-1} - v_r, v_r)$. La conjecture de Broadhurst (voir n° 2.5) prévoit la dimension $D_{k,r}$ de l'espace de ces polynômes bialternaux. La mise au point de tout ceci permettra d'expliciter $\mathcal{Z}$ comme une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Q}$ (la « décomposition canonico-explicite des multizêtas » selon Écalle).

Enfin, Drinfeld a introduit le groupe de Grothendieck-Teichmüller GRT_1 avec son algèbre de Lie $\mathfrak{grt}_1$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{d}_0$ et $\mathfrak{grt}_1$ sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre $\mathfrak{mt}$ avec le crochet $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ d'Ihara. Il y a toutes les raisons de postuler l'*égalité* $\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{grt}_1$, d'autant que Racinet exhibe une suite d'éléments appartenant aux deux algèbres de Lie, et qui sont de bons candidats pour les générateurs demandés $\psi_3, \psi_5, \ldots$.

CONCLUSION

Nous n'avons considéré ici que les polyzêtas ordinaires. On peut aussi considérer les polyzêtas colorés de la forme

$$\zeta\begin{pmatrix}\omega_1 \ldots \omega_r \\ k_1 \ldots k_r\end{pmatrix} = Li_{k_1,\ldots,k_r}(\omega_1, \ldots, \omega_r)$$

où $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sont des racines de l'unité. Racinet a étendu la plupart de ses résultats à ce cadre, ainsi qu'Écalle, et Goncharov et Wojtkowiak ont étudié à fond ce cas. Mentionnons aussi les résultats de Bigotte [D1].

Si les conjectures énoncées dans cet exposé sont correctes, les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \ldots$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Que π soit transcendant est classique (Lindemann vers 1890), et R. Apéry a démontré en 1979 que $\zeta(3)$ est irrationnel. Très récemment, Rivoal [D2] a fait progresser énormément la question en prouvant que le rang sur $\mathbb{Q}$ de l'ensemble des nombres $\zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(2N+1)$ est au moins égal à $\frac{1}{3}\log N$, pour tout entier $N \geq 1$. En combinant ses méthodes avec la machine algébrique décrite ici, on doit pouvoir beaucoup avancer.

Les polyzêtas sont donnés par un type d'intégrales que Kontsevitch [D5] appelle « périodes ». Il donne aussi une définition élémentaire des « motifs mixtes » et de leurs matrices de périodes. À ma connaissance, personne n'a explicité une telle matrice de périodes contenant les polyzêtas. Il y a une algèbre de Hopf associée aux périodes, et il serait bon d'en élucider le lien avec les constructions de Racinet, qui exhibe le schéma DM comme un fibré principal de base A^1.

Enfin, il faudrait éclaircir la signification des polyzêtas en physique mathématique. Dans le calcul explicite des intégrales associées aux diagrammes de Feynman, les constantes rencontrées sont presque toujours des polyzêtas (colorés) [D3]. De plus, on dispose d'un modèle-jouet de théorie quantique des champs dont les intégrales associées aux diagrammes de Feynman sont les polyzêtas [D6]. Enfin, comme je l'ai mentionné dans un article précédent [D4], les ressemblances entre les algèbres de Lie telles que $\mathfrak{dm}_0$ et $\mathfrak{grt}$ et celles que Connes et Kreimer ont introduites dans la théorie de la renormalisation sont trop frappantes pour être fortuites.

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages généraux, ou de caractère historique

Voici d'abord quelques traités d'Analyse, présentant les fonctions spéciales dans une optique eulérienne

[A1] G.E. ANDREWS, R. ASKEY et R. ROY - *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999 [tout à fait à jour, par des experts].

[A2] N. BOURBAKI - *Fonctions d'une Variable Réelle*, Hermann, 1976 [voir surtout les chapitres VI et VII ; nombreuses coquilles, hélas !].

[A3] A. ERDELYI (éditeur) - *Higher Transcendental Functions*, vol. 1, McGraw-Hill, 1953 [« la » référence pour les fonctions spéciales].

[A4] E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON - *A Course of Modern Analysis*, 4[e] édition, Cambridge University Press, 1940 [le complément obligatoire au Bourbaki cité là-dessus, et qui l'a inspiré].

Voici Euler dans le texte, et ses commentateurs

[A5] L. EULER - *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 2 volumes, réimpression de l'édition de 1796, par ACL-éditions, 1987 [voir surtout les chapitres VIII à XI du premier Tome].

[A6] W. DUNHAM - *Euler, the master of us all*, Dolciani Math Expos. **22**, Math. Assoc. of America, 1999.

[A7] A. WEIL - *Number Theory, An Approach through History*, Birkhaüser, 1984 [le chapitre 3 traite d'Euler].

Pour quelques exemples de mathématiques « eulériennes », on peut consulter mes travaux suivants

[A8] P. CARTIER et A. VOROS - Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg, *in « The Grothendieck Festschrift »*, vol. II, pp. 1-67, Birkhaüser, 1990.

[A9] P. CARTIER - An Introduction to zeta functions, *in « From Number Theory to Physics »* (Waldschmidt et *al.*, éditeurs), pp. 1-63, Springer, 1995.

[A10] P. CARTIER - Mathemagics (A Tribute to L. Euler and R. Feynman), *in « Noise, Oscillators and Algebraic Randomness »* (M. Plana, éditeur), pp. 6-67, Springer, 2000.

Certains de mes exposés précédents au Séminaire Bourbaki traitent de sujets connexes

[A11] P. CARTIER - *Décomposition des polyèdres : le point sur le 3[e] problème de Hilbert*, Sém. Bourbaki 1984-85, exp. n° 646, Astérisque **133-134** (1986), 261-288.

[A12] P. CARTIER - *Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées*, Sém. Bourbaki 1987-88, exp. n° 687, Astérisque **161-162** (1988), 31-52.

[A13] P. CARTIER - *Développements récents sur les groupes de tresses. Application à l'algèbre et à la topologie*, Sém. Bourbaki 1989-90, exp. n° 716, Astérisque **189-190** (1990), 17-67.

[A14] P. CARTIER - *Démonstration « automatique » d'identités et fonctions hypergéométriques (d'après D. Zeilberger)*, Sém. Bourbaki 1991-92, exp. n° 746, Astérisque **206** (1992), 41-91.

Voici la référence à la démonstration de Calabi de la formule $\zeta(2) = \pi^2/6$ (section 1.2)

[A15] F. BEUKERS, E. CALABI et J. KOLK - *Sums of generalized harmonic series and volumes*, Nieuw Arch. v. Wiskunde **11** (1993), 217-224.

B. Introduction aux fonctions polylogarithmes et nombres polyzêtas

Voici d'abord les principales publications d'Écalle

[B1] J. ÉCALLE - *Théorie des moules*, 3 vol., prépublications mathématiques d'Orsay, 1981, 1982, 1985.

[B2] J. ÉCALLE - *La libre génération des multizêtas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles* (automne 1999).

[B3] J. ÉCALLE - *Ari/gari et la décomposition des multizêtas en irréductibles*, prépublication, avril 2000.

[plus divers documents, incomplets, qu'il a fait circuler depuis un an et demi ; il prépare un ouvrage exhaustif sur les polylogarithmes].

Au tour de Zagier

[B4] D. ZAGIER - Values of zeta functions and their applications, *in* « *First European Congress of Mathematics* », vol. II, pp. 497-512, Birkhaüser, 1994.

[B5] D. ZAGIER - *Multiple zeta values* [manuscrit inachevé, et non publié].

Puis du troisième découvreur

[B6] M.E. HOFFMAN - *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275-290.

[B7] M.E. HOFFMAN - *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477-495.

[B8] M.E. HOFFMAN et Y. OHNO - *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, à paraître.

Pour une introduction aux polylogarithmes $Li_k(z)$, voir

[B9] J. OESTERLÉ - *Polylogarithmes*, Sém. Bourbaki 1992-93, exp. n° 762, Astérisque **216** (1993), 49-67.

Pour un exposé approfondi, les deux références classiques

[B10] L. LEWIN - *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, 1981.

[B11] L. LEWIN (édit.) - *Structural properties of polylogarithms*, Math. Surveys and Monographs, vol. 37, Amer. Math. Soc., 1991.

Pour les fonctions quasi-symétriques, on se reportera à

[B12] I. GELFAND, D. KROB, A. LASCOUX, B. LECLERC, V. RETAKH and J.-Y. THIBON - *Non-commutative symmetric functions*, Adv. in Math. **112** (1995), 218-348.

[B13] C. MALVENUTO and C. REUTENAUER - *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. of Algebra **177** (1995), 967-982.

[B14] C. REUTENAUER - *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs, New series, n°7, Oxford Univ. Press, 1993.

Voici quelques références sur les identités entre polyzêtas

[B15] T. ARAKAWA et M. KANEKO - *Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189-209.

[B16] D. BORWEIN, J. BORWEIN et R. GIRGENSOHN - *Explicit evaluation of Euler sums*, Proc. Edin. Math. Soc. **38** (1995), 277-294.

[B17] J. BORWEIN et R. GIRGENSOHN - *Evaluation of triple Euler sums*, Electron. J. Combin. **3** (1996), n°1, 27 p.

[B18] J. BORWEIN, D. BRADLEY et D. BROADHURST - *Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums ; a compendium of results for arbitrary k*, hep-th/9611004.

[B19] A. GRANVILLE - *A decomposition of Riemann zeta function*, London Math. Soc. **247** (1997), 95-101.

[B20] K. IHARA et M. KANEKO - *Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values*, à paraître, 2001.

[B21] Y. OHNO - *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. of Number Th. **74** (1999), 39-43.

Pour les méthodes algorithmiques, voir le manuel

[B22] H. COHEN - *A course in computational algebraic number theory*, GTM 138, Springer, 1993.

et l'article original

[LLL] A. LENSTRA, H. LENSTRA et L. LOVACZ - *Factoring polynomials with rational coefficients*, Math. Ann. **261** (1982), 315-334.

C. Sur la structure de l'algèbre des polyzêtas

Sur la structure des algèbres de Hopf, le classique

[C1] J. MILNOR and J. MOORE - *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Maths. **81** (1965), 211-264.

Pour une mise au point sur la série Φ_{KZ}

[C2] J. GONZÁLEZ-LORCA - *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke*, Thèse, École Normale Supérieure, 1998, Rapport du LMENS n° 98-31.

[C3] T.T.Q. LE and J. MURAKAMI - *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 30-65.

et pour l'introduction originale de cette série

[C4] V.G. DRINFEL'D - *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related to* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829-860.

L'équipe de Lille a une longue suite de travaux combinatoires et informatiques

[C5] M. BIGOTTE, G. JACOB, N. OUSSOUS et M. PETITOT - *Tables des relations de la fonction zêta colorée*, preprint du LIFL, Université Lille I, 1998.

[C6] M. HOANG NGOC et M. PETITOT - *Lyndon words, polylogarithms and the Riemann zeta function*, Discrete Math. **217** (2000), 273-292.

[C7] M. HOANG NGOC, M. PETITOT et J. VAN DEN HOEVEN - *Polylogarithms and shuffle algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.

Pour les résultats de Racinet, voir sa thèse

[C8] G. RACINET - *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld*, Amiens, 2000 ; http://www.dma.ens.fr/˜racinet

Ihara a longuement étudié les algèbres de Lie liées aux groupes de tresses, et introduit le crochet $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$. Voir

[C9] Y. IHARA - The Galois representation arising from $P^1\backslash\{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, *in* « *Galois groups over* **Q** », pp. 299-313, Springer, 1989.

[C10] Y. IHARA - Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, *in* « *The Grothendieck Festschrift* », Vol. II, pp. 353-373, Birkhäuser, 1990.

[C11] Y. IHARA - *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, pp. 99-120, Math. Soc. Japan, 1991.

[C12] Y. IHARA - *On the stable derivation algebra associated with some braid groups*, Israel J. Math. **80** (1992), 135-153.

[C13] Y. IHARA - *Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro-p-fundamental group of* $P^1\backslash\{0,1,\infty\}$, preprint R.I.M.S., Kyoto University, 1999.

De manière parallèle, Goncharov a poursuivi une longue réflexion sur les aspects arithmétiques

[C14] A. GONCHAROV - *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Letters **5** (1998), 497-516.

[C15] A. GONCHAROV - *Multiple ζ-values, Galois groups and geometry of modular varieties*, Proceedings of the third European Congress of Mathematics, 2000.

[C16] A. GONCHAROV - *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(\ell)}(\mathbb{P}^1\backslash(\{0,\infty\}\cup\mu_N))$, Duke Math. J. (2001), à paraître.

[C17] A. GONCHAROV - *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, arXiv: math.AG/0103059.

D. Ouvertures

[D1] M. BIGOTTE - *Étude symbolique et algorithmique des fonctions polylogarithmes et des nombres d'Euler-Zagier colorés*, Thèse, USTL (Lille), décembre 2000.

[D2] K. BALL et T. RIVOAL - *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), 193-207.

[D3] D. BROADHURST - *Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams*, preprint, 1996, hep-th/9612012.

[D4] P. CARTIER - *La folle journée ; évolution des idées de point et de symétrie, de Grothendieck à Connes et Kontsevich*, n° spécial des Publ. Math. IHES (nov. 1998) (traduction anglaise dans le Bull. Amer. Math. Soc. **38** (2001), 389-408).

[D5] M. KONTSEVICH et D. ZAGIER - Periods, *in « Mathematics unlimited* – 2001 *and beyond »* (B. Engquist et W. Schmidt ed.), pp. 771-808, Springer, 2001.

[D6] U. MÜLLER and C. SCHUBERT - *A quantum field theoretical representation of Euler-Zagier sums*, arXiv:math.QA/9908067.

Pierre CARTIER

École Normale Supérieure
D.M.A.
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
et
I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette
E-mail : cartier@ihes.fr