Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe II

Claire Voisin

Chapitre 1

Le théorème de Mumford et ses généralisations

Le thème général de ce chapitre est l'interaction entre la complexité ou la taille des groupes de Chow et la complexité ou le niveau des structures de Hodge pour une variété projective complexe lisse X. L'application classe de cycle et l'application d'Abel-Jacobi permettent de relier les groupes de Chow de codimension k aux classes de Hodge de degré $2k$ et à la jacobienne intermédiaire $J^{2k-1}(X)$. Le premier groupe est un groupe discret, et la partie algébrique de la jacobienne intermédiaire est une variété abélienne. L'image de l'application d'Abel-Jacobi modulo cette partie algébrique est un groupe dénombrable par le théorème **??**. Donc les applications classes ne décrivent qu'un quotient du groupe de Chow isomorphe à une union dénombrable de translatés d'une variété abélienne.

Le théorème de Mumford montre que le noyau de l'application d'Abel-Jacobi dans le cas des zéro-cycles sur une surface n'a pas en général la taille d'une variété algébrique. Il relie d'autre part ce phénomène à la non-trivialité de la partie transcendante de la structure de Hodge sur $H^2(S)$ (tandis que l'application classe de cycle est à valeurs dans $H^4(S,\mathbb{Z})$ et l'application d'Abel-Jacobi à valeurs dans $J^3(S) = Alb\, S$).

Théorème 1.1 *(Mumford) Soit S une surface projective lisse telle que $H^{2,0}(S) \neq 0$. Alors le groupe $\mathrm{CH}_0(S)$ est de dimension infinie.*

Cette notion de dimensionalité infinie est la suivante. On peut voir le produit symétrique $S^{(k)}$ comme paramétrant les zéro-cycles effectifs de degré k de S. On a donc une application naturelle (S étant supposée connexe)

$$\sigma_k : S^{(k)} \times S^{(k)} \to \mathrm{CH}_0(S)_{hom},\ (Z_1, Z_2) \mapsto Z_1 - Z_2 \text{ mod. quivalence rationnelle.}$$

On montre que les fibres de cette application sont des unions dénombrable de sous-ensembles algébriques fermés. On peut donc assigner une dimension d_k à la fibre générale et poser $\dim \mathrm{Im}\, \sigma = \dim S^{(k)} \times S^{(k)} - d_k = 4k - d_k$. Les groupes de Chow sont alors de dimension infinie au sens où $\lim_{k\to\infty} \dim \mathrm{Im}\, \sigma_k = \infty$.

On a par ailleurs le théorème de Roitman

Théorème 1.2 *Si X est une variété projective lisse complexe dont le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension finie, l'application*

$$alb_X : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to Alb(X) = J^{2n-1}(X),\ n = \dim X$$

est un isomorphisme.

Ce théorème est un des rares exemples de détermination d'un groupe de Chow par la théorie de Hodge, valable sous l'hypothèse très contraignante de dimensionalité finie. Conjecturalement, comme on le discutera dans le chapitre suivant, ce type d'énoncé devrait se généraliser et fournir une description complète des groupes de Chow d'une variété par ses structures de Hodge.

Le théorème de Mumford admet la version suivante

Théorème 1.3 *Soit S une surface projective lisse telle qu'il existe une courbe $j : C \hookrightarrow S$ satisfaisant la condition que $j_* : \mathrm{CH}_0(C) \to \mathrm{CH}_0(S)$ est surjective. Alors $H^{2,0}(S) = 0$.*

Sous cette forme, il admet la généralisation suivante que l'on peut attribuer à Roitman

Théorème 1.4 *Soit X une variété projective lisse telle qu'il existe une sous-variété $j : W \hookrightarrow X$ de dimension k satisfaisant la condition que $j_* : \mathrm{CH}_0(W) \to \mathrm{CH}_0(X)$ est surjective. Alors $H^{l,0}(X) = 0,\ \forall l > k$.*

La preuve que nous présentons suit le modèle élégant proposé par Bloch et Srinivas et établissant sous les hypothèses du théorème 1.4 l'existence d'une décomposition de la diagonale

$$m\Delta = Z_1 + Z_2 \in \mathrm{CH}^n(X \times X),\ n = \dim X$$

avec $Z_1 \subset X \times W$, et $Z_2 \subset T \times X$, où $T \subset X$ est un sous-ensemble algébrique propre.

Cette décomposition a été à son tour généralisée par Paranjape, sous des hypothèses portant sur les groupes de Chow de petite dimension. On peut ainsi obtenir le résultat suivant dû à Lewis et Schoen

Théorème 1.5 *Soit X une variété projective lisse de dimension n telle que*

$$cl : \mathrm{CH}_l(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2n-2l}(X, \mathbb{Q})$$

est injective pour $l \leq k$. Alors on a $H^{p,q}(X) = 0,\ p \neq q,\ q \leq k$.

La première section est consacrée à des généralités sur la notion de dimension des groupes de Chow et à la preuve du théorème de Roitman 1.2. La seconde section établit la décomposition de la diagonale de Bloch-Srinivas et en déduit le théorème de Mumford sous sa forme la plus précise. On donne également quelques conséquences intéressantes de ce principe de décomposition, suivant [16].

On conclut par la décomposition généralisée de la diagonale et la preuve du théorème 1.5.

1.1 Variétés à CH_0 représentable

1.1.1 Représentabilité

On considère le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ des zéro-cycles d'une variété projective complexe. On supposera que X est connexe, de sorte que $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et que l'application

$$cl : \mathrm{CH}_0(X) \to H_0(X,\mathbb{Z})$$

s'identifie à l'application degré, qui à $Z = \sum_i n_i p_i$, $p_i \in X$ associe $d^0 Z = \sum_i n_i$. Un zéro-cycle Z s'écrit comme la différence de deux zéro-cycles effectifs

$$Z = Z_1 - Z_2,\ Z_1 = \sum_{i,n_i>0} n_i p_i,\ Z_2 = \sum_{i,n_i<0} -n_i p_i.$$

Soit $d^+ = \sum_{i,n_i>0} n_i$ et $d^- = \sum_{i,n_i<0} -n_i$. Les zéro-cycles Z_1 et Z_2 peuvent être vus comme des éléments des produits symétriques $X^{(d^+)}$ respectivement $X^{(d^-)}$, qui paramètrent les ensembles non ordonnés de d^+ (resp. d^-) points de X. Ces produits symétriques sont quotients des self-produits X^{d^+}, X^{d^-} de X par l'action des groupes symétriques S_{d^+} respectivement S_{d^-}. Ce sont donc des variétés singulières de dimension nd^+, resp. nd^-, $n = \dim X$.

On notera dans la suite $c : X^{(d)} \to \mathrm{CH}_0(X)$ l'application

$$Z \mapsto \text{classe}(Z) \text{ mod. quivalence rationnelle.}$$

Ce qui précède montre que l'on a pour chaque entier positif d une application

$$\sigma_d : X^{(d)} \times X^{(d)} \to \mathrm{CH}_0(X)_{hom},$$

$$(Z_1, Z_2) \mapsto c(Z_1) - c(Z_2).$$

Définition 1.6 *On dit que $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable si l'application σ_d est surjective pour d suffisamment grand.*

On va montrer que si $\mathrm{CH}_0(X)$ n'est pas représentable, $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension infinie dans un sens à préciser : on a d'abord

Lemme 1.7 *Les fibres de σ_d sont des unions dénombrables de sous-ensembles algébriques fermés de $X^{(d)} \times X^{(d)}$.*

Démonstration. En effet, donnons-nous un cycle $Z = Z^+ - Z^-$ de degré 0 de classe $z \in \mathrm{CH}_0(X)_{hom}$ et étudions la fibre $\sigma_d^{-1}(z)$: elle est constituée des paires (Z_1, Z_2) telles que $Z_1 - Z_2 + Z$ est rationnellement équivalent à 0, ce qui signifie qu'il existe des courbes $C_i \subset X$ de normalisation

$$\tau_i : \widetilde{C}_i \to X$$

et des fonctions rationnelles ϕ_i sur C_i telles que

$$\sum_i (\tau_i)_* div(\phi_i) = Z_1 - Z_2 + Z$$

dans $\mathcal{Z}_0(X)$. Alors en décomposant en partie positive et négative, on obtient l'existence de zéro-cycles effectifs A, B tels que

$$\begin{aligned} Z_1 + Z^+ + A &= \sum_i (\tau_i)_*(\phi_i^{-1}(0)) + B, \\ Z_2 + Z^- + A &= \sum_i (\tau_i)_*(\phi_i^{-1}(\infty)) + B. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Or les courbes C_i sont paramétrées par une union dénombrable de schémas de Hilbert de X, et si l'on fixe ces schémas de Hilbert et les degrés d_i des diviseurs $\phi_i^{-1}(0)$, les fonctions ϕ_i peuvent être vues comme des pinceaux de degrés d_i sur C_i. De plus, si l'on fixe les degrés a et b de A et B, les zéro-cycles A et B sont paramétrés par les produits symétriques $X^{(a)}$ et $X^{(b)}$ de X. Donc à condition de fixer certaines données discrètes, les objets $(C_i, \tau_i, \phi_i, A, B)$ sont paramétrés par une variété algébrique projective K. D'autre part, les équations (1.1.1) définissent un sous-ensemble algébrique fermé W_K dans $X^{(d)} \times X^{(d)} \times K$ et la fibre $\sigma_d^{-1}(z)$ est la réunion sur l'ensemble dénombrable des variétés K des projections de W_K dans $X^{(d)} \times X^{(d)}$. ■

On peut donc définir la dimension d'une fibre de σ_d comme étant la plus grande dimension d'une de ses composantes algébriques. Enfin il est facile de voir en examinant la preuve du lemme 1.7 qu'il existe une union dénombrable B de sous-ensembles algébriques propres de $X^{(d)} \times X^{(d)}$ telle que pour $x \in X^{(d)} \times X^{(d)} - B$, la dimension de la fibre $\sigma_d^{-1}(\sigma_d(x))$ est constante, égale à r.

Définition 1.8 *La dimension de* $\operatorname{Im}\sigma_d$ *est définie comme étant égale à* $2nd - r$, *où* r *est défini comme ci-dessus, et* $2nd = \dim X^{(d)} \times X^{(d)}$.

On montre facilement que cette dimension croît avec d.

Définition 1.9 *On dit que* $\mathrm{CH}_0(X)_{hom}$ *est de dimension infinie si*

$$\lim_{d\to\infty} \dim \operatorname{Im}\sigma_d = \infty$$

et de dimension finie sinon.

On a alors

Proposition 1.10 *Le groupe* $\mathrm{CH}_0(X)$ *est représentable si et seulement si il est de dimension finie.*

Démonstration. Si $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable, il existe un entier D tel que σ_D est surjective. Pour tout entier d, considérons l'ensemble

$$R \subset X^{(d)} \times X^{(d)} \times X^{(D)} \times X^{(D)}$$

constitué des quadruplets (Z_1, Z_2, Z_1', Z_2') tels que $\sigma_d(Z_1, Z_2) = \sigma_D(Z_1', Z_2')$. Comme σ_D est surjective, la projection

$$p : R \to X^{(d)} \times X^{(d)}$$

est surjective. Or la preuve du lemme 1.7 montre aussi que R est union dénombrable de sous-ensembles algébriques fermés. Donc par Baire, il existe une composante algébrique R_0 de R telle que

$$p : R_0 \to X^{(d)} \times X^{(d)}$$

a une image d'intérieur non vide, et donc est surjective. En particulier $\dim R_0 \geq 2nd$. Mais alors si

$$(Z_1, Z_2, Z_1', Z_2') \in R_0 \subset X^{(d)} \times X^{(d)} \times X^{(D)} \times X^{(D)}$$

on a

$$\dim_{(Z_1,Z_2)} R_0 \cap X^{(d)} \times X^{(d)} \times (Z_1', Z_2') \geq 2nd - 2nD.$$

Or ceci est un ensemble algébrique contenu dans la fibre $\sigma_d^{-1}(\sigma_D(Z_1', Z_2'))$. Comme (Z_1, Z_2) est quelconque puisque la projection

$$p : R_0 \to X^{(d)} \times X^{(d)}$$

est surjective, on conclut que les fibres de σ_d sont toutes de dimension $\geq 2nd - 2nD$ de sorte que l'on a $\dim \operatorname{Im} \sigma_d \leq 2nD$, et $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension finie.

Inversement, supposons que $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension finie. Soit D tel que $\dim \operatorname{Im} \sigma_D = \dim \operatorname{Im} \sigma_{D+1}$. On va montrer que ceci entraîne que $\operatorname{Im} \sigma_D = \operatorname{Im} \sigma_{D+1}$. En effet, si x est un point de X, on a une inclusion

$$i_x : X^{(D)} \times X^{(D)} \to X^{(D+1)} \times X^{(D+1)},$$

$$(Z_1, Z_2) \to (Z_1 + x, Z_2 + x)$$

telle que $\sigma_{D+1} \circ i_x = \sigma_D$. Soit F la fibre de σ_D passant par un point général (Z_1, Z_2) de $X^{(D)} \times X^{(D)}$ et soit F' la fibre de σ_{D+1} passant par un point général de $X^{(D+1)} \times X^{(D+1)}$. On sait que $\dim F' = \dim F + 2n$, où la dimension est définie comme la plus grande dimension d'une composante algébrique de F passant par le point considéré. Soit F'' la fibre de σ_{D+1} passant par le point $(Z_1 + x, Z_2 + x)$ de $X^{(D+1)} \times X^{(D+1)}$. Par semicontinuité des dimensions des fibres de σ_{D+1}, on a $\dim F'' \geq \dim F'$. Introduisons alors le sous-ensemble

$$R \subset X^{(D+1)} \times X^{(D+1)} \times X^{(D)} \times X^{(D)}$$

défini précédemment. Il est maintenant clair que R possède une composante algébrique R_0 passant par $(Z_1 + x, Z_2 + x, Z_1, Z_2)$, qui domine $X^{(D)} \times X^{(D)}$ et telle que la fibre de la seconde projection $q : R_0 :\to X^{(D)} \times X^{(D)}$ est de dimension égale à $\dim F''$, et donc est de dimension $\geq \dim F + 2nD$, tandis que les fibres de la première projection $p : R_0 \to X^{(D+1)} \times X^{(D+1)}$ sont de dimension générique au plus égale à $\dim F$. Donc on a

$$\dim p(R_0) \geq \dim R_0 - \dim F \geq \dim F'' + \dim X^{(D)} \times X^{(D)} - \dim F$$

$$\geq \dim F' - \dim F + 2nD = 2n(D+1) = \dim X^{(D+1)} \times X^{(D+1)}.$$

Donc p est surjective et $\mathrm{Im}\,\sigma_D = \mathrm{Im}\,\sigma_{D+1}$. Il en résulte immédiatement que

$$\mathrm{Im}\,\sigma_k = \mathrm{Im}\,\sigma_D,\ \forall k \geq D$$

et donc σ_D est surjective car

$$\mathrm{CH}_0(X)_{hom} = \cup_k \mathrm{Im}\,\sigma_k.$$

∎

1.1.2 Le théorème de Roitman

Le terme de représentabilité se justifie par le théorème suivant de Roitman, qui montre que si $\mathrm{CH}_0(X)_{hom}$ est de dimension finie, c'est un groupe algébrique.

Théorème 1.11 *(Roitman,[93]) Si $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable, l'application d'Albanese (ou encore application d'Abel-Jacobi Φ_X^n (cf [103], 12.1.3))*

$$alb : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to Alb(X)$$

qui est bien définie par la proposition **??**, *est un isomorphisme.*

La preuve du théorème passe par l'étape suivante

Proposition 1.12 *$\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable si et seulement si pour toute courbe lisse $C = Y_1 \cap \ldots \cap Y_{n-1}$ intersection complète d'hypersurfaces amples $Y_i \subset X$, l'application*

$$j_* : \mathrm{CH}_0(C)_{hom} = J(C) \to \mathrm{CH}_0(X)_{hom}$$

où $j : C \hookrightarrow X$ est l'inclusion de C dans X, est surjective.

Démonstration. Le sens direct est immédiat, car si $D \subset X$ est une courbe satisfaisant la conclusion de la proposition, on sait que pour $g = g(D)$, l'application

$$D^{(g)} \to \mathrm{CH}_0(D)_{hom} = J(D), z \mapsto c(z) - gc(x_0)$$

est surjective (cf [103], 12.1.3). Alors la surjectivité de j_* entraîne que l'application

$$X^{(g)} \to \mathrm{CH}_0(X)_{hom}, z \mapsto c(z) - gc(x_0)$$

est surjective.

Dans l'autre sens, soit $0 \in C$ et considérons l'application

$$\sigma_m^0 : X^{(m)} \to \mathrm{CH}_0(X)_{hom},\ Z \mapsto \sigma_m(Z, m0).$$

Comme $\dim \mathrm{Im}\,\sigma_m^0$ est bornée par une constante K, les fibres générales de σ_m^0 sont de dimension $\geq mn - K$ pour m assez grand. En fait on peut même supposer qu'elles sont de dimension égale à $mn - K$ pour m assez grand. En effet la fonction $\dim \mathrm{Im}\,\sigma_m^0$ est croissante avec m, et donc si elle est bornée elle est constante pour m assez grand. Il en résulte qu'une composante irréductible Z de dimension maximale d'une fibre générale de σ_m^0 ne peut pas être contenue dans un ensemble de la forme $X^{(m-i)}+W$, $i\geq 1$, avec $W\subset X^{(i)}$ et $\dim W<i$. En effet, supposons au contraire

$$Z\subset X^{(m-i)}+W,\ i\geq 1,\ W\subset X^{(i)},\ \dim W<i.$$

Comme on a $\dim Z=mn-K$, on a nécessairement

$$\dim X^{(m-i)}\geq mn-K-i+1$$

et donc $n(m-i)\geq mn-K+1$, ce qui entraîne $i<\frac{K}{n}$. Considérons maintenant le sous-ensemble $Z'\subset X^{(m-i)}+W$,

$$Z'=\{(z,w),\ z+w\in Z\}.$$

Par hypothèse, cet ensemble dominerait Z par l'application $(z,w)\mapsto z+w$ et donc serait de dimension $\geq mn-K$. Les fibres Z'_w de $pr_2:Z'\to W$ seraient donc de dimension au moins égale à $mn-K-i+1$. D'autre part, comme on a

$$\sigma_m^0(z+w)=\sigma_{m-i}^0(z)+\sigma_i^0(w),\ z\in X^{(m-i)},\ w\in X^{(i)},$$

et comme σ_m^0 est constante le long de Z, l'application σ_{m-i}^0 serait constante le long de chaque Z'_w. D'autre part, Z passant par un point général de $X^{(m)}$, Z'_w devrait aussi passer par un point général de $X^{(m-1)}$, pour w générique dans W. Comme $\dim Z'_w\geq mn-K-i+1$, cela contredirait le fait que les fibres générales de σ_{m-i}^0 sont de dimension égale à $(m-i)n-K$, puisque $m-i>m-\frac{K}{n}$ est arbitrairement grand.

Si $n\geq 2$, on a $mn-K\geq m$ pour m assez grand et on peut donc appliquer le lemme suivant, dont la démonstration sera donnée plus loin :

Lemme 1.13 *Soit Z un sous-ensemble irréductible de $X^{(m)}$ qui n'est pas contenu dans un sous-ensemble de la forme $X^{(m-i)}+W$, avec $i\geq 1$ et $\dim W<i$. Alors si $\dim Z\geq m$, Z rencontre $Y_1^{(m)}$.*

On conclut donc qu'une fibre générale de σ_m^0 rencontre $Y_1^{(m)}$ pour m assez grand si $n\geq 2$. Cela signifie que σ_m^0 et $\sigma^0_{m|Y_1^{(m)}}$ ont la même image pour m assez grand. Mais les applications $\sigma^0_{m|Y_1^{(m)}}$ sont aussi d'image de dimension bornée, et donc on peut itérer le raisonnement pour conclure finalement que σ_m^0 et $\sigma^0_{m|C^{(m)}}$ ont la même image pour m assez grand. Cela montre que tout 0-cycle de X de la forme $Z-m0$ est rationnellement équivalent à un 0-cycle de la forme $Z'-0$, avec $Z'\in Z^{(m)}$ et donc que

$$j_*:\mathrm{CH}_0(C)\to\mathrm{CH}_0(X)$$

est surjective. ■

Preuve du lemme 1.13. Considérons l'application quotient

$$r:X^m\to X^{(m)},$$

et soit $\widetilde{Z} := r^{-1}(Z)$. Soit $\widetilde{Z}_i$ une composante irréductible de $\widetilde{Z}$ dominant Z ; l'hypothèse sur Z équivaut au fait que pour tout $i \geq 1$ et pour tout sous ensemble I de cardinal i de $\{1, \dots, m\}$, on a

$$\dim p_I(\widetilde{Z}_i) \geq i.$$

De plus, comme $\widetilde{Z}_i$ domine Z, il suffit de montrer que $\widetilde{Z}_i$ rencontre Y_1^m. On voit facilement qu'une intersection complète K d'hypersurfaces génériques amples dans $\widetilde{Z}_i$ satisfaisant $\dim K = m$ satisfait encore les hypothèses. On peut donc supposer que $\dim \widetilde{Z}_i = m$. Considérons une désingularisation $\tau : Z' \to \widetilde{Z}_i$ de $\widetilde{Z}_i$. Sur Z' considérons les diviseurs

$$D_i := (pr_i \circ \tau)^{-1}(Y).$$

Ces diviseurs sont" numériquement effectifs", puisque leurs classes de cohomologie $[D_i]$ admettent des représentants qui sont des formes de type $(1,1)$ supérieures ou égales à 0. (Cela résulte du fait que Y_1 est ample et donc $[Y_1]$ admet un représentant qui est une forme de type $(1,1)$ strictement positive sur X.) D'autre part, pour montrer que $D_1 \cap \ldots \cap D_m \neq \emptyset$ il suffit de montrer que

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_m := \int_{Z'} [D_1] \smile \ldots \smile [D_m] > 0. \tag{1.1.2}$$

L'inégalité (1.1.2) est une conséquence du théorème de l'indice de Hodge, appliqué aux diviseurs sur les surfaces (cf [103], chapitre 11, exercice 2). On se contentera d'esquisser l'argument : Notons que par récurrence sur m, on a

$$D_2 \cap \ldots \cap D_{m-1} \neq \emptyset.$$

Supposons pour simplifier que $D_3 \cap \ldots \cap D_m$ est une surface S et que $D_2 \cap \ldots \cap D_m$ est une courbe. (On peut en fait se ramener à ce cas en utilisant le fait que $[D_2] \smile \ldots \smile [D_{m-1}] \neq 0$, quitte à remplacer les D_i par des hypersurfaces de la forme $(pr_i \circ \tau)^{-1}(Y_i')$ où $Y_i' \in \mid kY_1 \mid$, $k >> 0$.) Alors le diviseur $D_{2|S}$ est non trivial et on a sur S

$$D_{1|S} \cdot D_{2|S} \geq 0$$

par le même argument de positivité que précédemment. De plus, comme on a

$$D_{1|S} \cdot D_{1|S} \geq 0,\ D_{2|S} \cdot D_{2|S} \geq 0$$

le théorème de l'indice de Hodge montre que si $D_{1|S} \cdot D_{2|S} = 0$, alors

$$D_{1|S} \cdot D_{1|S} = 0.$$

(On utilise ici la non trivialité de $D_{2|S}$.) Mais comme

$$D_{1|S} \cdot D_{2|S} = D_1 \cdot \ldots \cdot D_m$$

$$D_{1|S}^2 = D_1^2 \cdot D_3 \cdot \ldots \cdot D_m$$

on a montré que si $D_1 \cdot \ldots \cdot D_m = 0$, alors $D_1^2 \cdot D_3 \cdot \ldots \cdot D_m = 0$ et en permutant les D_i on a aussi

$$D_i^2 \cdot D_1 \cdot \ldots \hat{D}_i \hat{D}_j \ldots \cdot D_m = 0.$$

Par un argument similaire, on montre plus généralement que si $D_1 \cdot \ldots \cdot D_m = 0$, alors $\Pi_i D_i^{n_i} = 0$, $\sum_i n_i = m$. Mais alors on a aussi $(D_1 + \ldots + D_m)^m = 0$, ce qui contredit le fait que $D_1 + \ldots + D_m$ est le pull-back via τ d'un diviseur ample. ∎

Preuve du théorème 1.11. La proposition 1.12 montre que si $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable, il existe une variété abélienne A et une correspondance

$$\Gamma \subset A \times X$$

de dimension $a = \dim A$ satisfaisant les propriétés suivantes

1. L'application
$$\Gamma_* : A \to \mathrm{CH}_0(X),\ a \mapsto \Gamma_*(a)$$
est à valeurs dans $\mathrm{CH}_0(X)_{hom}$ et est un morphisme de groupes.

2. Le morphisme Γ_* est surjectif.

Notons que la propriété 1 n'a rien d'automatique: elle dit que l'application

$$\Gamma_* : \mathrm{CH}_0(A) \to \mathrm{CH}_0(X)$$

induite par la correspondance Γ se factorise par l'application d'Albanese de A

$$alb_A : \mathrm{CH}_0(A) \to Alb\, A = A.$$

Il se trouve que les morphismes du type

$$j_* : J(C) \overset{alb_C^{-1}}{\cong} \mathrm{CH}_0(C)_{hom} \to \mathrm{CH}_0(X),$$

où j est l'inclusion d'une courbe C, satisfont cette propriété. Pour voir cela, considérons le cycle $\Gamma_C \subset J(C) \times C$ construit de la manière suivante à l'aide de l'application ϕ induite par l'application d'Albanese de C

$$\phi : C^{(g)} \to J(C),\ z_1 + \ldots + z_g \mapsto alb_C(\sum_i z_i - gc_0),$$

où g est le genre de C et $c_0 \in C$ est un point fixé. On pose d'abord

$$\Gamma_C^1 = \{(a, c), \ldots \exists z \in C^{(g)},\ c \in z, \phi(z) = a\} \subset J(C) \times C,$$

$$\Gamma_C^2 = g(J(C) \times c_0) \subset J(C) \times C$$

et $\Gamma_C = \Gamma_C^1 - \Gamma_C^2$. On vérifie sans peine que le morphisme Γ_{C*} annule le cycle 0 et donc est à valeurs dans $\mathrm{CH}_0(C)_{hom}$, et est tel que $\Gamma_{C*} : \mathrm{CH}_0(J(C)) \to \mathrm{CH}_0(C)_{hom}$ est décrit par

$$\Gamma_{C*}(\{a\}) = alb_C^{-1}(a),$$

pour tout $a \in J(C)$. Donc clairement ce morphisme satisfait aussi la propriété 1.

Il en résulte immédiatement que le cycle $\Gamma = (Id, j)_* \Gamma_C \subset J(C) \times X$ satisfait

$$\Gamma_*(a) = j_*(alb_C^{-1})(a)$$

et donc satisfait aussi la propriété 1. ∎

Soient maintenant A et Γ satisfaisant les propriétés 1 et 2. Le lemme 1.7 montre que le noyau de Γ_* est une union dénombrable de sous-ensembles algébriques de A. Comme c'est un sous-groupe de A, c'est une union dénombrable de translatés d'une sous-variété abélienne $A_0 \subset \operatorname{Ker}\Gamma_*$. Il existe alors une sous-variété abélienne B de A, supplémentaire de A_0 à isogénie près, c'est-à-dire telle que le morphisme

$$A_0 \times B \to A,\ (a,b) \mapsto a+b$$

soit surjectif à noyau fini.

Remplaçant A par B et Γ par $\Gamma_{|B\times X}$, on peut donc supposer que le morphisme Γ_* est à noyau dénombrable.

Soit $x_0 \in X$ et soit $R \subset A \times X$ le sous-ensemble défini par

$$R = \{(a,x)/\Gamma_*(a) = c(x) - c(x_0)\}.$$

R est une union dénombrable d'ensembles algébriques dont la projection sur X est surjective, car Γ_* est surjective. Donc R possède une composante algébrique R_0 qui domine X. Par ailleurs, comme $\operatorname{Ker}\Gamma$ est dénombrable, la projection $R_0 \to X$ est finie de degré r. R_0 est donc une correspondance de dimension égale à $\dim X$ entre X et A et fournit un morphisme

$$\alpha : X \to A,$$

donné par $\alpha(x) = alb_A(R_{0*}(x - x_0))$. Par la définition de R_0 et par la propriété 1, il est clair que l'on a

$$\Gamma_* \circ \alpha(x) = r(x - x_0) \text{ dans } \mathrm{CH}_0(X). \tag{1.1.3}$$

D'autre part, par la propriété universelle de l'application d'Albanese (cf [103], 12.1.3), il existe un morphisme de groupes

$$\beta : Alb(X) \to A$$

tel que $\alpha = \beta \circ alb_X$, où l'application d'Albanese est construite à l'aide du point x_0. On dispose donc des morphismes de groupes

$$A \xrightarrow{\Gamma_*} \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \xrightarrow{alb_X} Alb(X) \xrightarrow{\beta} A,$$

qui satisfont d'après (1.1.3):

$$\Gamma_* \circ \beta \circ alb_X = rId_{\mathrm{CH}_0(X)_{hom}}.$$

On en déduit immédiatement que $\operatorname{Ker} alb_X$ est de torsion et donc que

$$alb(X) : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to Alb(X)$$

est un isomorphisme à torsion près puisque alb_X toujours surjectif (cf [103], 12.1.3).

La preuve du théorème se conclut alors par le théorème suivant (cf [94], [14])

Théorème 1.14 *L'application d'Albanese*

$$alb(X) : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to Alb(X)$$

induit un isomorphisme sur les points de torsion pour toute variété projective lisse X.

∎

1.1.3 Énoncé du théorème de Mumford

Le théorème de Mumford montre l'existence de variétés lisses projectives à CH_0 non représentable. Sa version la plus précise dans le cas des surfaces est la suivante.

Théorème 1.15 *(Mumford [84]) Soit S une surface projective lisse telle que*

$$H^0(S, K_S) \neq 0.$$

Alors pour tout entier m l'application

$$\sigma_m : S^{(m)} \times S^{(m)} \to \mathrm{CH}_0(S)_{hom},\ (Z_1, Z_2) \mapsto c(Z_1) - c(Z_2)$$

est à fibre générale dénombrable. En particulier $\mathrm{CH}_0(S)$ n'est pas représentable.

Le théorème de Mumford a été généralisé par Roitman dans [93]: On considère une variété X projective complexe lisse de dimension n, et

$$\sigma_m : X^{(m)} \times X^{(m)} \to \mathrm{CH}_0(X)_{hom}.$$

Soit d_m la dimension de la fibre générale de σ_m.

Théorème 1.16 *Si $H^0(X, \Omega_X^k) \neq 0$, on a pour m suffisamment grand*

$$d_m < 2(n - k + 1)m.$$

Lorsque $n = k = 2$, le théorème de Mumford 1.15 est plus fort. Cela est dû est l'argument "symplectique" que l'on exposera plus loin et qui est propre aux 2-formes.

Le théorème de Roitman et le théorème de Mumford 1.15 sont en fait impliqués par le résultat suivant, que l'on démontrera dans la section suivante

Théorème 1.17 *S'il existe une sous-variété $j : X' \hookrightarrow X$ telle que $\dim X' < k$ et l'application*

$$j_* : \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est surjective, on a $H^0(X, \Omega_X^k) = 0$.

Le cas $k = 2$, $n = 2$ de ce théorème peut être considéré comme une version du théorème de Mumford, du fait de la proposition 1.12. Ce théorème admet le corollaire suivant, qui sera généralisé plus loin (théorème 1.31) :

Corollaire 1.18 *Soit X une variété projective lisse. Si le groupe $\mathrm{CH}_0(X)_{hom}$ des 0-cycles de X homologues à 0 est nul, alors*

$$H^0(X, \Omega_X^k) = 0, \forall k > 0.$$

En effet, il suffit sous les hypothèses du corollaire de prendre pour X' un ensemble fini de points de X, (un pour chaque composante connexe de X), et cet ensemble est de dimension 0. ∎

Preuve du théorème 1.16. On montre d'abord que si $d_m \geq 2(n-k+1)m$, $m \to \infty$, il existe $X' \subset X$, de dimension $\leq k-1$ tel que

$$j_* : \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est surjective. On conclut alors en appliquant le théorème 1.17

L'argument est le même que dans la preuve de la proposition 1.12. On prend pour X' l'intersection complète de $n-k+1$ hypersurfaces amples et on montre que ${X'}^{(m)} \times {X'}^{(m)}$ doit rencontrer les fibres de σ_m pour m assez grand, à condition qu'on ait $d_m \geq 2(n-k+1)m$, avec m arbitrairement grand. ∎

1.2 La construction de Bloch-Srinivas

1.2.1 Décomposition de la diagonale

Le résultat suivant, dû à Bloch-Srinivas [16], fournit une démonstration élégante du théorème 1.17. Soit $f : X \to Y$ une fibration projective, où X et Y sont lisses, et soit $Z \in \mathrm{CH}^k(X)$ un cycle de X. Considérons la propriété suivante :
(*) *Il existe une sous-variété $X' \subset X$ telle que pour tout $y \in Y$, le cycle $Z_y := Z_{|X_y} := j_y^* Z \in \mathrm{CH}^k(X_y)$ s'annule dans $\mathrm{CH}^k(X_y - X'_y)$, où j_y est l'inclusion de la fibre $X_y = f^{-1}(y)$ dans X.*

On a le résultat suivant :

Théorème 1.19 *Si Z satisfait la propriété (*), il existe un entier $m > 0$, et un cycle Z' supporté dans X' tel qu'on ait l'égalité*

$$mZ = Z' + Z'' \text{ dans } \mathrm{CH}^k(X), \tag{1.2.4}$$

où Z'' est un cycle supporté au dessus d'un sous-ensemble algébrique fermé propre $Y' \subset Y$.

En particulier si $X = X_1 \times Y$, f est la seconde projection, et $X' = X'_1 \times Y$, nous trouvons

Corollaire 1.20 *Soit $\Gamma \in \mathrm{CH}^k(X_1 \times Y)$; supposons que pour tout $y \in Y$, le cycle $\Gamma^*(y) \in \mathrm{CH}^k(X_1)$ a une restriction nulle dans $\mathrm{CH}^k(X_1 - X'_1)$. Alors on a une décomposition*

$$mZ = Z' + Z'' \in \mathrm{CH}^k(X_1 \times Y),$$

où Z' est supporté dans $X'_1 \times Y$ et Z'' est supporté dans $X_1 \times Y'$, pour un fermé propre $Y' \subset Y$.

En particulier, nous pouvons appliquer le corollaire précédent à la diagonale $Z = \Delta_X \subset X \times X$, en supposant qu'il existe un sous-ensemble algébrique fermé $j : X' \hookrightarrow X$ tel que

$$j_* : \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est surjectif. Alors $\mathrm{CH}_0(X - X')$ est nul par le lemme **??** et donc pour tout $x \in X$, le cycle $\Delta_{X*}x$ s'annule dans $\mathrm{CH}_0(X - X')$. Nous obtenons alors une décomposition de la diagonale

Corollaire 1.21 *Sous cette hypothèse, il existe un sous-ensemble algébrique fermé propre $T \subset X$ et une décomposition*

$$m\Delta = Z' + Z'' \in \mathrm{CH}^n(X \times X)$$

où Z' est supporté dans $T \times X$ et Z'' est supporté dans $X \times X'$.

Preuve du théorème 1.19. La suite exacte de localisation montre que le théorème équivaut à l'existence d'un cycle Z' supporté sur X' et d'un ouvert de Zariski U de Y tel que $mZ - Z'$ s'annule dans $\mathrm{CH}^k(X_U)$, où $X_U := f^{-1}(U)$. Il suffit donc de prouver le lemme avec Y remplacé par un ouvert de Zariski.

Quitte à remplacer Y par un ouvert de Zariski, on peut alors supposer que les intersections $Z_i \cap X_y$ et $X' \cap X_y$ sont propres pour toute composante de Z. L'hypothèse et la suite exacte de localisation disentt alors que pour tout $y \in Y$, il existe des sous-variétés $W_{y,l}$, $l = 1, \ldots, N_y$ de X_y de codimension $k-1$, des fonctions rationnelles $\phi_{y,l}$ sur $W_{y,l}$ et des cycles Z'_y contenus dans X'_y, tels que notant $\tau_{y,l} : \widetilde{W}_{y,l} \to X_y$ les normalisations, on ait

$$\sum_l \tau_{y,l_*}(div(\phi_{y,l})) = Z_y + Z'_y.$$

Or il existe un ensemble dénombrable d'ouverts de Zariski H_i de schémas de Hilbert relatifs paramétrant la donnée d'un point y de Y, d'un entier N_y, de N_y sous-variétés W_l irréductibles de X_y de codimension $k-1$, de diviseurs de Weil D_l de W_l, et d'un cycle Z'_y de codimension k contenu dans X'_y. Pour chaque i, considérons le sous-ensemble $H'_i \subset H_i$ défini par

$$H'_i = \{(y, (W_l, D_l)_{l=1,\ldots,N_y}) / \sum_l j_{l*} D_l = Z_y + Z'_y \text{ et}$$

$$\exists \phi_l \in \mathbb{C}(W_l)^*,\ D_l = n_{l*} div\, \phi_l\}$$

où $n_l : \widetilde{W}_l \to W_l$ est la normalisation. On peut montrer que H'_i est une union dénombrable de sous-ensembles algébriques localement fermés de H_i. Or l'hypothèse est que les applications $p_{i|H'_i} \to Y$, où $p_i : H_i \to Y$ sont les premières projections, satisfont

$$\cup_i \mathrm{Im}\, p_{i|H'_i} = Y.$$

Donc il existe un sous-ensemble algébrique fermé H d'un ouvert de H_i, contenu dans H'_i tel que l'application $p = p_{i|H}$ est dominante.

Quitte à remplacer H par une sous-variété, on peut supposer que p est génériquement finie de degré N. Quitte à restreindre Y, on peut de plus supposer que p est propre. On peut enfin par désingularisation supposer que H est lisse. Considérons le produit fibré

$$\begin{array}{rccc} p_X : & X_H & \to & X \\ & f_H \downarrow & & \downarrow f \\ p : & H & \to & Y. \end{array}$$

Or par définition des schémas de Hilbert H_i, et du fait que $H \subset H_i$, il existe des sous-schémas universels de codimension $k-1$

$$\mathcal{W}_l \subset X_H$$

plats au dessus de H, des diviseurs de Weil $\mathcal{D}_l$ de $\mathcal{W}_l$, et un cycle relatif $\mathcal{Z}'$ de codimension k de X_H supporté dans $X'_H := p_X^{-1}(X')$ satisfaisant les propriétés :

1. Chaque fibre D_l de $\mathcal{D}_l$ au dessus de $h \in H$ est un diviseur rationnellement équivalent à 0 dans la fibre correspondante $W_l \subset \mathcal{W}_l$ au dessus de h.

2. On a l'égalité de cycles de X_H

$$\sum_l \mathcal{D}_l = p^{-1}(Z) + \mathcal{Z}'.$$

On a alors le lemme suivant

Lemme 1.22 *Sous l'hypothèse 1, il existe pour chaque l un ouvert de Zariski U_l de H, tel que la restriction du cycle $\mathcal{D}_l$ de codimension 1 de $\mathcal{W}_l$ est rationnellement équivalent à 0 dans $p_l^{-1}(U_l)$, où $p_l : \mathcal{W}_l \to H$ est la restriction de f_H à $\mathcal{W}_l$.*

Admettant ce dernier lemme momentanément, on pose $U = \cap_l U_l$. U contient un ouvert de Zariski de la forme $p^{-1}(V)$, où V est un ouvert de Zariski dans Y. Le lemme 1.22 montre que le cycle $\sum_l \mathcal{D}_l$ de X_H devient rationnellement équivalent à 0 dans l'ouvert $X_{p^{-1}(V)}$ de X_H. L'application

$$p : X_{p^{-1}(V)} \to X_V = f^{-1}(V)$$

étant propre de degré N, on obtient en appliquant p_{X*} à l'égalité 2

$$NZ_{|X_V} + p_{X*}\mathcal{Z}' = 0 \,\mathrm{dans}\, \mathrm{CH}^k(X_V)$$

ce qui termine la preuve du théorème 1.19 puisque $p_{X*}\mathcal{Z}'$ est supporté dans X'. ∎

Preuve du lemme 1.22. On se ramène facilement, en restreignant H, ce qui permet de considérer une désingularisation simultanée de la famille $\mathcal{W}_l \to H$, au cas où $\mathcal{W}_l$ est lisse et p_l est submersive. Alors $\mathcal{D}_l$ est le diviseur d'une section rationnelle d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{W}_l$, qui satisfait la propriété que les restrictions $\mathcal{L}_{|W_{l,h}}$ sont triviales pour tout $h \in H$. Comme les fibres $W_{l,h}$ sont connexes, on a $h^0(\mathcal{D}_{l|W_{l,h}}) = 1$ et le théorème de changement de base montre que $R^0 p_{l*}\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur H. De plus, la trivialité de $\mathcal{L}_{W_{l,h}}$ et le théorème de changement de base (cf [64], III.12) entraînent qu'il existe un isomorphisme canonique

$$p_l^* R^0 p_{l*}\mathcal{L} \cong \mathcal{L}.$$

Il suffit alors de prendre pour U_l un ouvert sur lequel le fibré en droites $R^0 p_{l*}\mathcal{L}$ est trivial. ∎

Remarque 1.23 *La démonstration donnée ici est plus proche en esprit des arguments de Mumford. Nous retenons essentiellement de [16] le principe de la décomposition (1.2.4) du cycle Z.*

1.2.2 Preuve du théorème de Mumford

Nous montrons d'abord le théorème 1.17 à l'aide du corollaire 1.21

Preuve du théorème 1.17. Par hypothèse il existe $j : X' \hookrightarrow X$ de dimension $\leq k-1$ telle que $j_*(\mathrm{CH}_0(X')) = \mathrm{CH}_0(X)$. On peut donc appliquer le corollaire 1.21. Il fournit une une égalité

$$m\Delta_X = Z' + Z''$$

dans $\mathrm{CH}^n(X \times X)$, où $n = \dim X$, Z' est supporté dans $X \times X'$ et Z'' est supporté dans $T \times X$, T étant un sous-ensemble algébrique propre de X. Par le lemme **??**, on a donc une égalité des classes de cohomologie correspondantes

$$mcl(\Delta_X) = cl(Z') + cl(Z'') \in H^{2n}(X \times X, \mathbb{Z}).$$

Voyons ces classes de cohomologie, ou plutôt leurs composantes de Künneth comme des morphismes de structures de Hodge (cf [103], 11.3.3)

$$m[\Delta_X]^*,\ [Z']^*,\ [Z'']^* : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(X, \mathbb{Z}).$$

Alors on a l'égalité

$$m[\Delta_X]^* = [Z']^* + [Z'']^* \in Hom\,(H^k(X, \mathbb{Z}), H^k(X, \mathbb{Z})). \tag{1.2.5}$$

Or les morphismes $[\Delta_X]^*$ sont égaux à l'identité, du fait que Δ_X est la diagonale. Donc (1.2.5) fournit

$$mId = [Z']^* + [Z'']^* \in Hom\,(H^k(X, \mathbb{Z}), H^k(X, \mathbb{Z})).$$

En particulier, pour $\eta \in H^0(X, \Omega_X^r) \subset H^r(X, \mathbb{C})$, on a

$$m\eta = [Z']^*\eta + [Z'']^*\eta \in H^r(X, \mathbb{C}). \tag{1.2.6}$$

Soit maintenant $l : \widetilde{T} \to X$ une désingularisation de T. Le cycle Z'' étant supporté dans $T \times X$ provient d'un cycle $\widetilde{Z}''$ de $\widetilde{T} \times X$, $Z'' = (l, Id)_*(\widetilde{Z}'')$ et donc on a de même

$$cl(Z'') = (l, Id)_*(cl(\widetilde{Z}'')).$$

Or rappelons que si $\alpha \in H^{2n}(X \times X, \mathbb{Z})$ le morphisme correspondant

$$\alpha_k^* : H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(X, \mathbb{Z})$$

est défini par

$$\alpha_k^*(\beta) = p_{1*}(p_2^*(\beta) \smile \alpha). \tag{1.2.7}$$

La formule (1.2.7) montre alors que

$$[Z'']^* = l_* \circ [\widetilde{Z}'']^*. \tag{1.2.8}$$

De même, soit $\tilde{j} : \widetilde{X}' \to X$ une désingularisation de X' et soit $\widetilde{Z}'$ un cycle de $X \times \widetilde{X}'$ tel que $(Id, \tilde{j})_*(\widetilde{Z}') = Z'$. Alors la formule (1.2.7) montre que

$$[Z']^* = [\widetilde{Z}']^* \circ \tilde{j}^*. \tag{1.2.9}$$

Par les équations (1.2.8) et (1.2.9), (1.2.6) fournit maintenant

$$m\eta = [\widetilde{Z}']^* \circ \tilde{j}^*\eta + l_* \circ [\widetilde{Z}'']^*\eta.$$

Mais comme $\dim X' < k$, on a pour $r \geq k$

$$\tilde{j}^*\eta = 0 \text{ dans } H^0(\widetilde{X}', \Omega^r_{\widetilde{X}'}).$$

On a donc $[\widetilde{Z}']^* \circ \tilde{j}^*\eta = 0$ et

$$m\eta = l_* \circ [\widetilde{Z}'']^*\eta. \tag{1.2.10}$$

D'autre part, comme $\dim T < \dim X$ le morphisme de structures de Hodge l_* est de bidegré (s,s) avec $s = \operatorname{codim} T > 0$, et donc son image a une intersection avec $H^0(X, \Omega^r_X) = H^{r,0}(X)$ réduite à 0. Donc l'égalité (1.2.10) entraîne $\eta = 0$, pour

$$\eta \in H^0(X, \Omega^r_X),\ r \geq k.$$

∎

Le corollaire 1.20 et une adaptation immédiate de la preuve du théorème 1.17 fournissent plus généralement le résultat suivant

Proposition 1.24 *Soit W une variété projective lisse et $Z \subset W \times X$ un cycle de codimension $n = \dim X$. Supposons qu'il existe une sous-variété $X' \subset X$ de dimension k_0 tels que pour tout $w \in W$, le zéro-cycle Z_w soit rationnellement équivalent dans X à un cycle supporté sur X'. Alors pour tout $k > k_0$ et tout $\eta \in H^0(X, \Omega^k_X)$, on a $[Z]^*\eta = 0$ dans $H^0(W, \Omega^k_W)$.*

Nous prouvons maintenant le théorème de Mumford

Preuve du théorème 1.15. Pour S une surface lisse projective complexe, et un entier n, considérons une composante algébrique $R \subset S^n \times S^n$ de l'ensemble

$$\{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in S^{2n} / \sum_{1 \leq i \leq 2n} n_i c(x_i) = 0 \text{ dans } \mathrm{CH}_0(S)\},$$

où les entiers n_i sont non nuls. Supposons que R domine S^n par la première projection. On va montrer

Lemme 1.25 *Si $H^0(S, K_S) \neq 0$, on a $\dim R \leq 2n$ de sorte que la première projection $p_1 : R \to S^n$ est génériquement finie.*

Nous montrons d'abord que cela entraîne que sous la même hypothèse, la fibre générale de

$$\sigma_n : S^{(n)} \times S^{(n)} \to \mathrm{CH}_0(S)_{hom}$$

est dénombrable. En effet, si la fibre générale de σ_n n'était pas dénombrable, il existerait une sous-variété algébrique

$$R \subset S^{(n)} \times S^{(n)} \times S^{(n)} \times S^{(n)}$$

telle que la première projection $R \to S^{(n)} \times S^{(n)}$ est dominante et à fibre de dimension positive et telle que

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \in R \Rightarrow \sigma_n(Z_1, Z_2) = \sigma_n(Z_3, Z_4).$$

Mais alors, en prenant l'image réciproque de R dans $S^n \times S^n \times S^n \times S^n$, on trouve qu'il existe

$$R' \subset S^n \times S^n \times S^n \times S^n$$

telle que la première projection $R' \to S^n \times S^n$ est dominante et à fibre de dimension positive et telle que

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_n) \in R' \Rightarrow \sum_i x_i - y_i - z_i + t_i = 0 \in \mathrm{CH}_0(S).$$

Or ceci contredirait le lemme 1.25, où l'on remplace n par $2n$, et les n_i sont égaux à ± 1. ∎

Preuve du lemme 1.25. Notons que l'inclusion $R \subset S^{2n}$ fournit une correspondance $Z \subset R \times S$ donnée par $Z_*(r) = n_1 z_1 + \ldots + n_{2n} z_{2n}$ pour $r = (z_1, \ldots, z_{2n}) \in R$. Cette correspondance est en fait égale à

$$\sum_{1 \leq i \leq 2n} n_i Z_i,$$

où la correspondance Z_i satisfait

$$Z_{i*}(r) = z_i,\ r = (z_1, \ldots, z_{2n}).$$

En d'autres termes Z_i est le pull-back par la i-ème projection $p_{i|R} : R \to S$ de la diagonale $\Delta_S \subset S \times S$.

On peut maintenant appliquer la proposition 1.24 en désingularisant éventuellement R, à la correspondance Z, et on conclut que pour $\eta \in H^0(S, K_S) = H^0(S, \Omega_S^2)$ on a

$$[Z]^* \eta = 0 \text{ dans } H^0(\Omega_R^2).$$

Mais comme $Z = \sum_i n_i Z_i$ avec $Z_i = (p_{i|R} \times Id)^* \Delta_S$, on a

$$[Z_i]^* \eta = p_{i|R}^*(\Delta_S^* \eta) = p_i^* \eta_{|R}$$

$$[Z]^* \eta = \sum_i n_i p_i^* \eta_{|R}.$$

On a donc la relation $\sum_i n_i p_i^* \eta_{|R} = 0$ dans $H^0(R, \Omega_R^2)$. Soit maintenant $r \in R$ un point générique. R est lisse au point r, et la première projection $p : R \to S^n$ est submersive. De plus $p(r)$ est un point générique de S^n et donc la forme η est non nulle en tous les points z_i, $i \leq n$. Il en résulte que la forme holomorphe de degré 2

$$\sum_{i \leq n} n_i p_i^* \eta_{|R}$$

est de rang $2n$ sur R au voisinage de r. L'égalité

$$\sum_{i\leq n} n_i p_i^* \eta_{|R} = -\sum_{n+1\leq i\leq 2n} n_i p_i^* \eta_{|R}$$

montre alors que la forme

$$\sum_{n+1\leq i\leq 2n} n_i p_i^* \eta_{|R}$$

est aussi de rang $2n$ ce qui entraîne que η est également non nulle aux points z_j, $j > n$. Mais alors la forme

$$\omega = \sum_{1\leq i\leq 2n} n_i p_i^* \eta$$

est une forme holomorphe de degré 2 non dégénérée sur S^{2n} au voisinage de r. Or cette forme s'annule par restriction à R. Donc $\dim R \leq 2n$ puisque son espace tangent en r est totalement isotrope pour la 2-forme ω sur l'espace tangent de S^{2n} en r, et donc est de dimension au plus égale à $\frac{1}{2}\dim T_{S^{2n},r} = 2n$. ∎

1.2.3 Autres applications

La décomposition donnée dans le corollaire 1.21 admet d'autres applications qui généralisent certains résultats connus antérieurement. Nous avons par exemple

Proposition 1.26 *[16] Soit X une variété projective complexe lisse telle qu'il existe une sous-variété $j : X' \hookrightarrow X$ de dimension ≤ 3 telle que*

$$j_* : \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est surjective. Alors la conjecture de Hodge est vraie pour les classes de degré 4.

Ce résultat avait été prouvé par Conte et Murre [28] lorsque X est une variété de dimension 4 couverte par des courbes rationnelles. Une telle variété X satisfait l'hypothèse puisque tout point x est contenu dans une courbe rationnelle C_x dont la normalisée est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Par définition de l'équivalence rationnelle, tous les points $y \in C_x$ sont rationnellement équivalents dans C_x et donc dans X et si X' est une hypersurface ample de X, C_x rencontre X' et x est rationnellement équivalent dans X à n'importe quel point de $X' \cap C_x$.

Preuve de la proposition 1.26. Appliquons le corollaire 1.21. Il existe donc un sous-ensemble propre $T \subset X$, que l'on peut supposer de codimension 1 et des cycles Z' et Z'' de dimension n supportés dans $T \times X$ et $X \times X'$ respectivement tels que

$$m\Delta_X = Z' + Z'' \text{ dans } \mathrm{CH}^n(X \times X) \tag{1.2.11}$$

pour un entier m non nul. Soit $k : \widetilde{T} \to X$ et $\tilde{j} : \widetilde{X}' \to X$ des désingularisations de T et X' respectivement. La décomposition (1.2.11) fournit alors d'après le lemme **??** l'égalité

$$mcl(\Delta_X) = cl(Z') + cl(Z'') \text{ dans } H^{2n}(X \times X, \mathbb{Z}).$$

et en particulier les égalités des morphismes de structures de Hodge associés aux composantes de Künneth de type $(2n-4,4)$ de ces trois classes de Hodge

$$m[\Delta_X]^* = [Z']^* + [Z'']^* : H^4(X,\mathbb{Z}) \to H^4(X,\mathbb{Z}).$$

Or soit $\widetilde{Z}' \subset \widetilde{T} \times X$ un cycle de codimension n tel que

$$(k, Id)_* \widetilde{Z}' = Z'$$

et soit $\widetilde{Z}'' \subset X \times \widetilde{X}'$ un cycle de codimension n tel que

$$(Id, \tilde{j})_* \widetilde{Z}'' = Z''.$$

On a

$$cl(Z') = (k, Id)_* cl(\widetilde{Z}'),\ cl(Z'') = (Id, \tilde{j})_* cl(\widetilde{Z}'')$$

et il en résulte que $\forall \alpha \in H^4(X,\mathbb{Z})$, on a

$$[Z']^*\alpha = k_*[\widetilde{Z}']^*\alpha,\ [Z'']^*\alpha = [\widetilde{Z}'']^*(\tilde{j}^*\alpha).$$

Or comme X' est de dimension ≤ 3, la conjecture de Hodge rationnelle est vraie pour $\widetilde{X}'$ en tout degré. (En effet elle est vraie pour les classes de degré 2 par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$ et aussi pour les classes de degré 4 par l'isomorphisme de Lefschetz

$$L = [H] \smile : H^2(X,\mathbb{Q}) \cong H^4(X,\mathbb{Q}),$$

où H est un diviseur ample, qui envoie isomorphiquement $Hdg^2(X)$ sur $Hdg^4(X)$ et envoie $[D]$ sur $[H] \smile [D] = [H \cdot D]$.) D'autre part la conjecture de Hodge est satisfaite pour les classes de degré ≤ 2 et pour toute variété projective lisse.

Si $\alpha \in H^4(X,\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X)$ est une classe de Hodge rationnelle, les classes $\tilde{j}^*\alpha \in H^4(\tilde{X}',\mathbb{Q})$ et $[Z']^*\alpha \in H^2(\tilde{T},\mathbb{Q})$ sont donc des classes de cycles algébriques de $\widetilde{X}'$ et $\widetilde{T}$ respectivement. La relation

$$m[\Delta_X]^*\alpha = m\alpha = k_*[\widetilde{Z}']^*\alpha + [\widetilde{Z}'']^*(\tilde{j}^*\alpha)$$

et la compatibilité de l'application classe de cycle avec les correspondances montrent alors que α est également la classe d'un cycle algébrique à coefficients rationnels. ∎

Une autre application concerne les groupes de Griffiths

$$\mathrm{Griff}^k(X) := \mathcal{Z}^k(X)_{hom}/\mathcal{Z}^k(X)_{alg}$$

introduits dans la section **??**.

Proposition 1.27 *[16] Soit X une variété projective complexe lisse telle qu'il existe une sous-variété $j : S \hookrightarrow X$ de dimension ≤ 2 telle que $j_* : \mathrm{CH}_0(S) \to \mathrm{CH}_0(X)$ est surjective. Alors le groupe $\mathrm{Griff}^2(X)$ est de torsion.*

Démonstration. Il est clair que les sous-groupes $\mathrm{CH}_{alg} \subset \mathrm{CH}$ formés des cycles algébriquement équivalents à 0 sont stables par l'action des correspondances. (Cela résulte par exemple de la définition de l'équivalence algébrique et de la proposition **??**.)

Le corollaire 1.20 nous donne d'autre part avec les mêmes notations que précédemment une décomposition

$$m\Delta_X = Z' + Z'' \text{ dans } \mathrm{CH}^n(X \times X) \tag{1.2.12}$$

pour un entier m non nul, où $T \subset X$ est un sous-ensemble fermé propre que l'on peut supposer de codimension 1, et Z' et Z'' sont des cycles de codimension n supportés dans $T \times X$ et $X \times X'$ respectivement. Mais alors nous avons pour tout cycle $z \in \mathrm{CH}^l(X)$ la relation

$$mz = m\Delta_X^* z = Z'^* z + Z''^* z. \tag{1.2.13}$$

Soit $k : \widetilde{T} \to X$ et $\tilde{j} : \tilde{S} \to X$ des désingularisations de T et S respectivement, et soient $\widetilde{Z}' \subset \widetilde{T} \times X$, $\widetilde{Z}'' \subset X \times \widetilde{S}$ tels que

$$(k, id)_* \widetilde{Z}' = Z',\ (Id, \tilde{j})_* \widetilde{Z}'' = Z''. \tag{1.2.14}$$

Si maintenant $z \in \mathrm{CH}^2(X)_{hom}$, on déduit de (1.2.13) et (1.2.14)

$$mz = k_* \widetilde{Z'}^* z + \widetilde{Z''}^* (\tilde{j}^* z) \tag{1.2.15}$$

Or comme S est une surface, $\tilde{j}^* z \in \mathrm{CH}_0(\widetilde{S})_{hom}$ et est donc algébriquement équivalent à 0 (cf section **??**). De même, comme T est de codimension 1, $\widetilde{Z'}^* z \in \mathrm{CH}^1(\widetilde{T})_{hom}$ et donc $\widetilde{Z'}^* z$ est algébriquement équivalent à 0 (cf section **??**). Il résulte alors de (1.2.15) que mz est algébriquement équivalent à 0. ∎

1.3 Généralisation

1.3.1 Décomposition généralisée de la diagonale

La décomposition de la diagonale donnée dans le corollaire 1.21 fournit en particulier le corollaire suivant, lorsque la variété lisse projective connexe X satisfait l'hypothèse $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbb{Z}$ (de sorte que l'on peut supposer que X' est un point $x \in X$) :

Corollaire 1.28 *Si $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbb{Z}$ il existe une décomposition $m\Delta_X = Z' + Z''$ dans $\mathrm{CH}^n(X \times X)$, où Z' est supporté dans $T \times X$, avec $T \subset X$ un sous-ensemble algébrique fermé propre de X, et Z'' est supporté dans $X \times x$.*

Notons que la condition $\mathrm{CH}_0(X) = \mathbb{Z}$ équivaut au fait que l'application cl est injective sur $\mathrm{CH}_0(X)$.

Ce résultat a été généralisé par Paranjape [89] et Laterveer [76] qui étudient plus généralement des hypothèses de trivialité sur les groupes de Chow de petite dimension

Théorème 1.29 *Supposons que pour $k \leq k_0$ les applications*

$$cl : \mathrm{CH}_k(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2n-2k}(X, \mathbb{Q})$$

sont injectives. Alors il existe une décomposition

$$m\Delta_X = Z_0 + \ldots Z_{k_0} + Z' \in \mathrm{CH}^n(X \times X), \tag{1.3.16}$$

où $m \neq 0$ est un entier, Z_i est supporté dans $W_i' \times W_i$ avec $\dim W_i = i$ *et* $\dim W_i' = n-i$, *et Z' est supporté dans $T \times X$, où $T \subset X$ est un fermé algébrique de codimension $\geq k_0 + 1$.*

Le corollaire 1.21 est le cas $k_0 = 0$ de ce théorème.

Remarque 1.30 *On peut donner une version de ce théorème concernant les correspondances $\Gamma \subset Y \times X$ de codimension n. Sous l'hypothèse que $\Gamma_* : \mathrm{CH}_k(Y) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{CH}_k(X) \otimes \mathbb{Q}$ se factorise par $cl : \mathrm{CH}_k(Y) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2\dim Y - 2k}(Y, \mathbb{Q})$ pour $k \leq k_0$, on obtient alors une décomposition de $\Gamma \in \mathrm{CH}^n(Y \times X)$ semblable à celle donnée dans (1.3.16).*

Preuve du théorème 1.29. On raisonne par récurrence sur k_0, le cas $k_0 = 0$ étant déjà traité. On peut donc supposer qu'on a une décomposition

$$m\Delta_X = Z_0 + \ldots + Z_{k_0 - 1} + Z' \in \mathrm{CH}^n(X \times X), \tag{1.3.17}$$

où $m \neq 0$ est un entier, Z_i est supporté dans $W_i' \times W_i$ avec $\dim W_i = i$ et $\dim W_i' = n-i$, et Z' est supporté dans $T \times X$, où $T \subset X$ est un fermé algébrique de codimension $\geq k_0$. On peut supposer que T est de codimension k_0. Soit $\tau : \widetilde{T} \to X$ une désingularisation. Soit $\widetilde{Z}' \subset \widetilde{T} \times X$ un cycle tel que $(\tau, Id)_* \widetilde{Z}' = Z'$. Le cycle $\widetilde{Z}' \subset \widetilde{T} \times X$ est de codimension $n - k_0$ et induit un morphisme $\widetilde{Z}'_* : \mathrm{CH}_0(\widetilde{T}) \to \mathrm{CH}_{k_0}(X)$. Or on sait que $cl : \mathrm{CH}_{k_0}(X) \to H^{2n-2k_0}(X, \mathbb{Z})$ a un noyau de torsion. Donc l'application $\widetilde{Z}'_*$ envoie $\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom}$ dans la torsion de $\mathrm{CH}_{k_0}(X)$. Par un argument de dénombrabilité, il en résulte qu'il existe un entier M tel que $M\widetilde{Z}'_* = 0$ sur $\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom}$. En effet, le fait que $\widetilde{Z}'_*(\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom})$ soit contenu dans la torsion de $\mathrm{CH}_{k_0}(X)$ se traduit par le fait que chaque composante connexe $\widetilde{T}_i$ de $\widetilde{T}$ est une union dénombrable

$$\widetilde{T}_i = \cup_m > 0 \widetilde{T}_{i,m},$$

$$\widetilde{T}_{i,m} = \{t \in \widetilde{T}_i,\, m\widetilde{Z}'_*(t - t_i) = 0 \,\mathrm{dans}\, \mathrm{CH}_{k_0}(X)\},$$

où t_i est un point fixé de $\widetilde{T}_i$. Mais on peut montrer que chaque $\widetilde{T}_{i,m}$ est une union dénombrable de sous-ensembles algébriques fermés de $\widetilde{T}_i$. Par Baire, on conclut alors que l'un de ces ensembles est d'intérieur non vide et donc est égal à $\widetilde{T}_i$. On doit donc avoir $\widetilde{T}_{i,m_i} = \widetilde{T}_i$ pour un entier m_i. En faisant cela pour chaque composante connexe de $\widetilde{T}$, et en prenant pour M le produit des entiers m_i construits ci-dessus, on a bien montré que $M\widetilde{Z}'_* = 0$ sur $\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom}$.

Pour chaque composante $\widetilde{T}_i$ de $\widetilde{T}$, choisissons comme ci-dessus un point $t_i \in \widetilde{T}_i$ et soit $W_i = \widetilde{Z}'_*(t_i)$. Le cycle

$$Z'' = M(\widetilde{Z}' - \sum_i \widetilde{T}_i \times W_i) \subset \widetilde{T} \times X$$

satisfait alors la propriété que sa restriction à chaque $t \times X$ est trivial dans $\mathrm{CH}_{k_0}(X)$. On applique alors le théorème 1.19 et on conclut qu'il existe un cycle $\widetilde{Z}'' \subset \widetilde{T}' \times X$

où $\widetilde{T}' \subset \widetilde{T}$ est un sous-ensemble algébrique fermé d'intérieur vide, et un entier M' tels que

$$M'M(\widetilde{Z}' - \sum_i \widetilde{T}_i \times W_i) = \widetilde{Z}'' \text{ dans } \mathrm{CH}_n(\widetilde{T} \times X).$$

Posant $T' = \tau(\widetilde{T}')$ et $Z'' = \tau_* \widetilde{Z}''$, on obtient

$$M'M(Z' - \sum_i T_i \times W_i) = Z'' \text{ dans } \mathrm{CH}_n(X \times X),$$

avec Z'' supporté sur $T' \times X$ et $\operatorname{codim} T' \geq k_0 + 1$. Combinant cette égalité avec (1.3.17), on obtient la décomposition souhaitée.

∎

1.3.2 Application

Comme conséquence du théorème 1.29, on obtient le résultat suivant, dû à Schoen [98], et Lewis [77], qui généralise le corollaire 1.18 :

Théorème 1.31 *Si la variété projective complexe lisse satisfait la condition : pour tout $k \leq k_0$, l'application $cl : \mathrm{CH}_k(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{2n-2k}(X, \mathbb{Q})$ est injective, on a*

$$H^{p,q}(X) = 0,\ \forall p \neq q,\ q \leq k_0.$$

Démonstration. Écrivons la décomposition de la diagonale généralisée du théorème 1.29

$$m\Delta_X = Z_0 + \ldots + Z_k + Z' \in \mathrm{CH}^n(X \times X).$$

Par hypothèse les Z_i sont de la forme

$$Z_i = \sum_j n_{i,j} W'_{i,j} \times W_{i,j}, \tag{1.3.18}$$

où les $W_{i,j}$, $W'_{i,j}$ sont les composantes irréductibles de W_i, respectivement W'_i. De plus Z' est supporté dans $T \times X$ avec $\operatorname{codim} T \geq k+1$. Soit $l : \widetilde{T} \to X$ une désingularisation de T et soit $\widetilde{Z}'$ dans $\mathrm{CH}_n(\widetilde{T} \times X)$ tel que $(l, Id)_*(\widetilde{Z}') = Z'$. La décomposition ci-dessus donne une décomposition des classes de cohomologie correspondantes

$$mcl(\Delta_X) = cl(Z_0) + \ldots + cl(Z_k) + cl(Z') \text{ dans } \mathrm{CH}^n(X \times X)$$

et des morphismes de structures de Hodge correspondants pour tout l

$$m[\Delta_X]^* = mId = [Z_0]^* + \ldots [Z_k]^* + [Z']^* : H^l(\mathbb{Z}) \to H^l(X, \mathbb{Z}).$$

Or il est clair d'après (1.3.18) que

$$[Z_i]^*(\alpha) = \sum_j n_{i,j} < \alpha, [W_{i,j}] > [W'_{i,j}],$$

où $<,>$ est la forme d'intersection sur $H^*(X)$. En particulier, on a

$$Z_i^*(\alpha) = 0,\ \forall \alpha \in H^{p,q}(X),\ p \neq q.$$

Pour α satisfaisant cette hypothèse, on a donc

$$m\alpha = [Z']^*(\alpha) = l_*([\widetilde{Z}']^*(\alpha)).$$

Donc si $\alpha \in H^{p,q}(X)$, avec $p \neq q$ on a

$$m\alpha \in \operatorname{Im} l_* \cap H^{p,q}(X).$$

Or comme $\operatorname{codim} T = k_0 + 1$, le morphisme de Gysin

$$l_* : H^{p+q-2k_0-2}(\widetilde{T}, \mathbb{Z}) \to H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

est un morphisme de structures de Hodge de bidegré $(k_0 + 1, k_0 + 1)$ et donc on a

$$\operatorname{Im} l_* \cap H^{p,q}(X) = 0,\ q \leq k_0.$$

Donc on a bien

$$m\alpha = 0$$

pour

$$\alpha \in H^{p,q}(X),\ p \neq q,\ q \leq k_0.$$

∎

Exercices pour le chapitre 10

1. *Un lemme sur les* 0*-cycles des surfaces.* Soit S une surface projective connexe lisse et L un fibré inversible très ample sur S. Pour $C \in \mid L \mid$ une courbe lisse, on note $j : C \hookrightarrow S$ l'inclusion et

$$H := \operatorname{Ker}\,(j_* : H^1(C, \mathbb{Z}) \to H^3(S, \mathbb{Z})).$$

   On note $A \subset J(C)$ la sous-variété abélienne correspondant à la sous-structure de Hodge H.

   a) On suppose qu'il existe une sous-structure de Hodge $H_1 \subset H$ non triviale. Montrer qu'il existe un nombre fini de sous-structures de Hodge $H_1' \subset H$ telles qu'il existe un automorphisme $\gamma \in Aut\,(H, <,>)$ envoyant H_1 sur H_1'. (Utiliser le fait que $<,>$ polarise la structure de Hodge sur H et qu'un sous-groupe compact de $Aut\,(H_{\mathbb{R}}, <,>)$ contenu dans $Aut\,(H, <,>)$ est fini.)

   b) En déduire que si $C \in \mid L \mid$ est générale, il n'existe pas de sous-structure de Hodge non triviale H_1 de H. (Sinon, par a), une puissance de la monodromie fixerait le sous-espace H_1. Mais cela contredirait le théorème **??**, qui reste encore vrai pour une puissance de la monodromie lorsqu'on est en dimension impaire (cf preuve du théorème **??**).)

c) Montrer que pour toute courbe lisse $C \in\mid L \mid$, le noyau

$$\mathrm{Ker}\,(j_* : \mathrm{CH}_0(C)_{hom} = JC \to \mathrm{CH}_0(S))$$

est une union dénombrable de translatés d'une sous-variété abélienne de A.

d) Déduire de ce qui précède que si $alb : \mathrm{CH}_0(S)_{hom} \to \mathrm{Alb}\, S$ n'est pas un isomorphisme, pour C une courbe générale dans $\mid L \mid$, le noyau $\mathrm{Ker}\, j_*$ est dénombrable.

2. *Conjectures standard.* On rappelle (cf [103], 6.2) que si (X, H) est une variété projective lisse polarisée, c'est-à-dire que $H \in Pic\,X$ est ample, on dispose d'opérateurs de Lefschetz

$$L = c_1(H) \smile : H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^{*+2}(X, \mathbb{Q})$$

$$\Lambda : H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^{*-2}(X, \mathbb{Q})$$

qui sont des morphismes de structures de Hodge de poids 2 et -2 respectivement, satisfaisant les relations

$$[L, \Lambda] = (k - n) Id \,\mathrm{sur}\, H^k(X, \mathbb{Q}),\ n = \dim X.$$

On dit qu'un opérateur $\gamma : H^*(X, \mathbb{Q}) \to \oplus H^{*+2r}(X, \mathbb{Q})$ de degré $2r$ est algébrique s'il existe un cycle $\Gamma \in CH^{n+r}(X, \mathbb{Q})$ tel que

$$[\Gamma]^* = \gamma \,\mathrm{sur}\, H^*(X, \mathbb{Q}).$$

a) Montrer que l'opérateur L est algébrique. (Considérer

$$j_*(\Delta_Y) \in \mathrm{CH}^{n+1}(X \times X),$$

où j est l'inclusion de $Y \in\mid H \mid$, et Δ_Y est la diagonale de Y.)

b) Montrer que les composantes de Künneth $[\Delta]_i$ de la diagonale Δ de X s'expriment comme des combinaisons à coefficients rationnels de $[\Delta]$ et des $[L, \Lambda]^k$. En déduire que si l'opérateur Λ est algébrique, les $[\Delta]_i$ sont algébriques.

c) Montrer que si Λ est algébrique, il existe pour tout $i \leq n$, un cycle $\Gamma_i \in \mathrm{CH}^{n-i}(X \times X) \otimes \mathbb{Q}$ tel que

$$[\Gamma_i]^* : H^{n+i}(X, \mathbb{Q}) \to H^{n-i}(X, \mathbb{Q})$$

est inverse de l'isomorphisme de Lefschetz

$$L^i : H^{n+i}(X, \mathbb{Q}) \to H^{n-i}(X, \mathbb{Q}).$$

NB. Le fait que l'opérateur Λ soit algébrique est connu sous le nom de "conjecture $B(X, H)$" (cf [70]). C'est bien sûr un cas particulier de la conjecture de Hodge.

Chapitre 2

La conjecture de Bloch et ses généralisations

Ce chapitre final rassemble quelques évidences en faveur de la réciproque conjecturale au théorème de Mumford et ses généralisations. Nous considérons tout d'abord la conjecture de Bloch pour les surfaces satisfaisant la condition $p_g := \dim H^{2,0}(S) = 0$. Cette conjecture réciproque du théorème 1.15 consiste dans l'énoncé suivant

Conjecture 2.1 *Soit S une surface lisse projective complexe telle que $H^{2,0}(S) = 0$. Alors l'application d'Albanese*

$$alb_S : \mathrm{CH}_0(S)_{hom} \to \mathrm{Alb}\, S$$

est un isomorphisme.

Cette conjecture a été prouvée par Bloch, Kas et Lieberman dans le cas des surfaces qui ne sont pas de type général et nous esquissons leur démonstration qui utilise la classification de ces surfaces. Nous donnons également l'exemple de surfaces de Godeaux, qui sont des surfaces de type général avec $p_g = 0$ pour lesquelles la conjecture est prouvée.

Nous nous tournons dans la seconde section vers le problème de formuler une conjecture générale englobant la réciproque du théorème 1.31 et de ses versions fonctorielles, où l'on remplace une variété et ses groupes de Chow par une correspondance entre variétés et les morphismes induits entre leurs groupes de Chow. La conjecture qui émerge porte alors sur l'existence d'une filtration décroissante $F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}$ sur les groupes de Chow à coefficients rationnels d'une variété X, qui satisfait les propriétés suivantes

1. Cette filtration est stable par les correspondances.

2. $F^{k+1}\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} = 0$.

3. Si $\Gamma \subset X \times Y$, l'application induite par Γ_*

$$\Gamma_* : Gr_F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} \to Gr_F^i\mathrm{CH}^l(Y)_{\mathbb{Q}},\ l = k + \mathrm{codim}\,\Gamma - \dim X$$

est nulle si le morphisme de structure de Hodge

$$[\Gamma]_* : H^{2k-i}(X, \mathbb{Q}) \to H^{2l-i}(X, \mathbb{Q})$$

est nul.

Shuji Saito a proposé une construction pour une telle filtration. Sa filtration satisfait la première et la dernière propriétés mais la condition $F^{k+1}\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} = 0$ reste le problème essentiel à résoudre. Murre propose également une construction reposant sur l'existence conjecturale d'une décomposition de la diagonale en somme d'idempotents agissant sur les groupes de Chow. Ce dernier point est d'autant plus conjectural que même sa version cohomologique (la conjecture de Hodge pour les composantes de Künneth de la diagonale) n'est pas connue.

Nous terminons enfin avec l'exemple des variétés abéliennes, pour lesquelles l'existence du produit de Pontrjagin permet à Bloch de construire une filtration sur le groupe CH_0 satisfaisant les propriétés 1 et 2 ci-dessus. Enfin Beauville montre un théorème de décomposition des groupes de Chow en somme directe d'espaces caractéristiques pour l'action des homothéties qui est presque celui prédit par la conjecture. Il utilise pour cela la "transformée de Fourier" considérée par Mukai dans un contexte différent, et qui permet de passer des groupes de Chow d'une variété abélienne A aux groupes de Chow de la variété abélienne duale $\widehat{A}$.

2.1 Surfaces avec $p_g = 0$

2.1.1 Énoncé de la conjecture

Soit X une surface projective complexe lisse. Le théorème de Mumford 1.15 dit que si $H^{2,0}(X) \neq 0$ le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ n'est pas représentable, et d'après le théorème de Roitman 1.11, ceci équivaut au fait que l'application d'Albanese

$$alb_X : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to \mathrm{Alb}\, X$$

n'est pas injective.

Dans [11], Bloch conjecture la réciproque du théorème de Mumford

Conjecture 2.2 *Soit X une surface projective lisse telle que $H^{2,0}(X) = 0$. Alors l'application*

$$alb_X : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \to \mathrm{Alb}\, X$$

est un isomorphisme.

En particulier, si la surface X est de plus régulière, c'est-à-dire satisfait la condition que l'irrégularité

$$q(X) := \dim H^{1,0}(X)$$

est nulle, on devrait avoir $\mathrm{CH}_0(X)_{hom} = 0$, puisqu'alors $\mathrm{Alb}\, X = 0$.

Les exemples les plus simples de surfaces X satisfaisant la condition que le genre géométrique

$$p_g(X) := \dim H^{2,0}(X)$$

est nul sont les surfaces réglées (ou encore, de façon équivalente par le théorème 2.3, uniréglées, c'est-à-dire couvertes par des courbes rationnelles [8]). De telles surfaces satisfont nécessairement $H^{2,0}(X) = 0$ et plus généralement $H^0(X, K_X^{\otimes n}) = 0, \forall n > 0$. En effet, on a pour $\phi : \mathbb{P}^1 \cong C \to X$ un morphisme non constant d'une coube rationnelle dans X, la formule d'adjonction

$$\phi^* K_X \otimes det\, N_\phi = K_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \tag{2.1.1}$$

où $N_\phi = \phi^* T_X / \phi_* T_C$ est le faisceau normal. Si de plus les déformations de $\phi(C)$ couvrent X, on a $deg\, det\, N_\phi \geq 0$, puisque le fibré normal admet des sections non nulles correspondant aux déformations du premier ordre de ϕ, et donc la formule (2.1.1) montre que $deg\, \phi^* K_X < 0$. Il en résulte que

$$H^0(\mathbb{P}^1, \phi^* K_X^{\otimes n}) = 0, \forall n > 0,$$

ce qui entraîne bien sûr que $H^0(X, K_X^{\otimes n}) = 0$ puisque X est couverte par les déformations de $\phi(C)$.

Ces surfaces satisfont la conjecture 2.2. En effet ces surfaces étant couvertes par des courbes rationnelles, tout point $x \in X$ d'une telle surface appartient à une courbe rationnelle qui rencontre une courbe ample fixée $D \subset X$ en au moins un point y. Alors x est rationnellement équivalent à y, ce qui montre que l'inclusion $j : D \to X$ satisfait la propriété que

$$j_* : \mathrm{CH}_0(D) \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est surjective.

Il existe cependant des surfaces qui satisfont la condition $p_g = 0$ et qui ne sont pas couvertes par des courbes rationnelles, de sorte que la représentabilité de leur groupe CH_0 n'est pas immédiatement visible géométriquement.

Notons enfin que la conjecture 2.2 est cohérente avec le fait que le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ et l'espace $H^{2,0}(X)$ sont tous les deux des invariants birationnels d'une surface. Pour les groupes de Chow, cela résulte du fait que si $\phi : X - - \to Y$ est une transformation birationnelle, on peut par Hironaka construire par des éclatements successifs une variété $\widetilde{X}$ birationnellement équivalente à X et un diagramme de morphismes

$$\begin{array}{ll} \widetilde{X} & \stackrel{\tilde{\phi}}{\to} Y \\ \tau \downarrow & \\ X & \end{array}$$

tel que $\phi = \tilde{\phi} \circ \tau^{-1}$ sur un ouvert de Zariski de X. Alors comme ϕ est birationnelle, $\tilde{\phi}$ est de degré 1 et l'application

$$\tilde{\phi}^* : \mathrm{CH}_0(Y) \to \mathrm{CH}_0(\widetilde{X})$$

admet pour inverse à gauche $\tilde{\phi}_*$. Or par le théorème **??**, l'application

$$\tau_* : \mathrm{CH}_0(\widetilde{X}) \to \mathrm{CH}_0(X)$$

est un isomorphisme. On dispose donc d'une application injective

$$\tau_* \circ \tilde{\phi}^* : \mathrm{CH}_0(Y) \to \mathrm{CH}_0(X)$$

En utilisant le fait que $\tau_* \circ \tau^* = Id$, on voit aussi que

$$\tilde{\phi}_* \circ \tau^* : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(Y)$$

est surjective. En échangeant le rôle de X et Y et en notant que les morphismes ci-dessus ne dépendent pas du choix de la désingularisation de ϕ, on conclut que $\tau_* \circ \tilde{\phi}^*$ est un isomorphisme.

Quant aux espaces $H^0(X, K_X)$ et plus généralement $H^0(X, \Omega_X^q)$, leur invariance birationnelle résulte du théorème de Hartogs (cf [103], 1.2.2) qui permet d'étendre les sections d'un fibré vectoriel (en l'occurence Ω_X^q) définies sur le complémentaire d'un fermé de Zariski de codimension au moins 2 et du fait qu'une application birationnelle à valeurs dans une variété projective est définie dans le complémentaire d'un fermé de Zariski de codimension au moins 2.

2.1.2 Classification

Soit X une surface projective. La dimension de Kodaira $\kappa(X)$ de X est définie de la façon suivante. Pour chaque entier $n \geq 0$ le système linéaire $\mid nK_X \mid$, s'il est non vide fournit une application rationnelle

$$\Phi_{nK_X} : X - - - \to \mathbb{P}^r,\ r = h^0(X, nK_X) - 1.$$

On pose alors

$$\kappa(X) = -\infty, \text{ si } h^0(X, nK_X) = 0,\ \forall n > 0$$

$$\kappa(X) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \dim \operatorname{Im} \Phi_{nK_X}, \text{ sinon}.$$

La classification des surfaces à équivalence birationnelle près décrit assez bien les surfaces de dimension de Kodaira ≤ 1. (Les autres surfaces sont dites "de type général".)

On a tout d'abord

Théorème 2.3 *(cf [8]) Une surface de dimension de Kodaira égale à $-\infty$ est birationnellement réglée, c'est-à-dire birationnellement équivalente à une surface X munie d'un morphisme*

$$X \to C$$

dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

Lorsque l'irrégularité $q = \dim \operatorname{Alb} X$ est non nulle, on obtient un tel morphisme en considérant l'application d'Albanese de X. Lorsque $q = 0$, la courbe C ci-dessus doit alors être de genre 0, ou encore isomorphe à $\mathbb{P}^1$. De telles surfaces sont clairement rationnelles, c'est à dire birationnellement équivalentes à $\mathbb{P}^2$. Ces surfaces sont caractérisées par le théorème de Castelnuovo (cf [8])

Théorème 2.4 *Une surface projective lisse est rationnelle si et seulement si elle satisfait les égalités $q = p_g = p_2 = 0$, où $p_2 := \dim H^0(X, K_X^{\otimes 2})$.*

Lorsqu'une surface X n'est pas de dimension de Kodaira $-\infty$, on peut montrer qu'elle possède un unique modèle minimal, c'est-à-dire une surface projective lisse Y telle qu'il existe un morphisme $X \to Y$ birationnel et ne possédant aucune courbe rationnelle de self-intersection -1. (Par un résultat dû à Castelnuovo, une telle courbe peut se contracter sur un point, fournissant une surface lisse et projective.) Désormais on ne considérera donc que des surfaces minimales, c'est-à-dire ne possédant aucune courbe rationnelle de self-intersection -1.

Théorème 2.5 *Soit X une surface minimale de dimension de Kodaira 0. Alors on a $q(X) \leq 2$ et les résultats suivants*

1. *Si $q(X) = 2$, X est une surface abélienne, c'est-à-dire un tore complexe projectif de dimension 2. En particulier $H^0(X, K_X) \neq 0$.*

2. *Si $q(X) = 1$, X est un quotient du produit de deux courbes elliptiques E et F (c'est-à-dire des tores complexes de dimension 1) par un groupe fini G opérant sans point fixe et par une action compatible avec la structure de produit (c'est-à-dire $G \subset Aut\, F \times Aut\, E$). Si $p_g(X) = 0$ l'action de G sur E est donnée par des translations et l'action sur F est telle que le quotient F/G soit une courbe rationnelle.*

3. *Si $q(X) = 0$, X est une surface $K3$ (cf [103], [3]), ou une surface d'Enriques, c'est-à-dire le quotient d'une surface $K3$ Y par une involution sans point fixe agissant par -1 sur $H^0(Y, K_Y)$. Dans le second cas seulement on a $p_g(X) = 0$.*

Remarque 2.6 *L'inégalité $q \leq 2$ résulte facilement du fait que $K_X^2 := c_1(K_X)^2 = 0$ pour une surface minimale de dimension de Kodaira 0. On utilise en effet la symétrie des nombres de Hodge et l'égalité de Noether*

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) := \sum_i (-1)^i h^i(X, \mathcal{O}_X) = \frac{c_1(K_X)^2 + c_2}{12}$$

avec $c_2(X) = \chi_{top}(X) = \sum_i (-1)^i b_i(X)$ (théorème de Hopf).

Le même argument montre aussi que si $\kappa(X) = 0$ et $H^0(X, K_X) = 0$, on a $q \leq 1$.

Considérons maintenant les surfaces minimales de dimension de Kodaira égale à 1.

Théorème 2.7 *Si $\kappa(X) = 1$, $q > 0$, X admet un morphisme $\phi : X \to C$ dont la fibre est une courbe elliptique.*

Si $\kappa(X) = 1$ et $q(X) = 0$, X admet un pinceau de courbes elliptiques $(E_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$.

Remarque 2.8 *Une surface fibrée en courbes elliptiques satisfait toujours la condition $\kappa(X) \leq 1$. En effet si E est la fibre générique de la fibration $\phi : X \to C$, le fibré normal de E dans X est trivial, comme c'est toujours le cas pour la fibre d'une fibration, et la formule d'adjonction montre alors que $K_{X|E} = K_E$, ce dernier étant le fibré trivial si E est une courbe elliptique. Mais alors il est clair que les applications pluricanoniques Φ_{nK_X} se factorisent par ϕ.*

Considérons enfin les surfaces X satisfaisant $\kappa(X) = 1$ et $p_g(X) = 0$. On a

Théorème 2.9 *Si X est une surface satisfaisant $\kappa(X) = 1$ et $p_g(X) = 0$, on a nécessairement $q(X) \leq 1$. Si $q(X) = 1$ l'application d'Albanese*

$$alb : X \to \mathrm{Alb}\, X = E$$

est une fibration isotriviale si les fibres sont de genre > 1, ou une fibration elliptique à fibres lisses isomorphes si les fibres sont de genre 1. Dans ce dernier cas, si on remplace $X \to E$ par la fibration jacobienne $J \to E$ associée (cf section **??***), on peut montrer que $\kappa(J) = 0$, $q(J) = 1$ de sorte que J est du type décrit dans le théorème 2.5, 2.*

L'inégalité $q(X) \leq 1$ résulte encore une fois de la formule de Noether et de l'égalité $K_X^2 = 0$. Le caractère isotrivial de la fibration se déduit de la positivité des fibrés $R^0 alb_* K_{X/E}$.

2.1.3 La conjecture de Bloch pour les surfaces non de type général

Pour les surfaces de dimension de Kodaira égale à $-\infty$, la conjecture de Bloch est satisfaite par le théorème 2.3 et les observations faites à la fin de la section 2.1.1.

On esquisse maintenant les arguments de [15] qui traitent la conjecture 2.2 pour les surfaces satisfaisant $\kappa(X) \leq 1$.

Théorème 2.10 *La conjecture 2.2 est vraie pour les surfaces qui ne sont pas de type général.*

Démonstration. Considérons les surfaces X de dimension de Kodaira 0 ou 1 satisfaisant la condition $p_g(X) = 0$. D'après les théorèmes 2.5 et 2.7, elles sont de deux types possibles selon leur irrégularité.

a) $q(X) = 1$. Alors l'application d'Albanese de X est une fibration isotriviale en courbes de genre ≥ 1, et si $g \geq 2$, X est d'après le théorème 2.9 le quotient d'un produit $C \times \widetilde{E}$ par un groupe fini G agissant sans point fixe via une inclusion $G \subset Aut\, C \times Aut\, \widetilde{E}$. Ici $\widetilde{E}$ est un revêtement étale de $E = \mathrm{Alb}\, X$ qui permet de trivialiser la fibration $alb : X \to E$.

En particulier le groupe G agit par translations sur $\widetilde{E}$ qui est aussi une courbe elliptique.

Lorsque les fibres de alb sont de genre 1 l'application alb peut avoir des fibres multiples, mais celles-ci disparaissent lorsque l'on remplace la fibration elliptique $X \to E$ par sa fibration jacobienne associée $J \to E$. Or il est facile de voir que X et J ont mêmes groupes de Chow CH_0. En effet, si la fibration $X \to E$ possède une section σ, il est clair que X et J sont birationnellement équivalentes par l'application

$$x \in X_b \mapsto alb_{X_b}(x - \sigma(b))$$

où X_b est la courbe elliptique $alb^{-1}(b) \subset X$. En général, soit $C \subset X$ une courbe qui n'est pas contenue dans les fibres de alb et n'est pas ramifiée sur E au dessus des points critiques de alb. Alors le produit fibré $X_C := X \times_E C$ est une fibration en courbes elliptiques qui possède une section et donc est birationnellement équivalente à la fibration jacobienne associée $J_C = J \times_E C$. Si $\Gamma \subset X_C \times J_C$ est le graphe de cet isomorphisme, on vérifie aisément que l'image Γ' de Γ dans $X \times J$ induit un isomorphisme

$$\Gamma'_* : \mathrm{CH}_0(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{CH}_0(J)_{hom} \otimes \mathbb{Q}.$$

Remplaçant X par J, on est alors ramené d'après le théorème 2.9 à la situation précédente du quotient d'un produit de deux courbes C et $\widetilde{E}$ par un groupe fini.

Notons que comme G agit par translations sur $\widetilde{E}$, G agit trivialement sur $H^0(\widetilde{E}, \Omega_{\widetilde{E}})$ et la condition

$$H^0(X, K_X) = 0 = H^0(C \times \widetilde{E}, K_{C\times\widetilde{E}})^G$$

entraîne alors $H^0(C, \Omega_C)^G = 0$, où l'indice supérieur G signifie "partie invariante sous G". Donc l'action de G sur C satisfait $C/G \cong \mathbb{P}^1$ ou encore

$$\mathrm{CH}_0(C)^G_{hom} = 0.$$

Par ailleurs, à torsion près le groupe G agit trivialement sur $\mathrm{CH}_0(\widetilde{E})$. En effet, comme il agit trivialement sur $H^0(\widetilde{E}, \Omega_{\widetilde{E}})$ et donc sur $\mathrm{Alb}\,\widetilde{E}$, il agit trivialement sur $CH_0(\widetilde{E})_{hom}$. D'autre part il agit trivialement sur le quotient

$$CH_0(\widetilde{E})/CH_0(\widetilde{E})_{hom} \cong H^2(\widetilde{E}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

et donc l'action est de la forme

$$g^*z = z + (deg\, z)z_g$$

avec $z_g \in CH_0(\widetilde{E})_{hom}$. Comme G est de torsion, on voit en itérant cette formule que z_g est de torsion. Soit $(c, e) \in C \times \mathrm{CH}_0(\widetilde{E})$.

Alors pour $g \in G$, notant $g = (g_1, g_2)$ dans $Aut\, C \times Aut\, \widetilde{E}$, on a

$$g(c, e) = (g_1c, g_2e) \equiv (g_1c, e)$$

où la relation d'équivalence est l'équivalence rationnelle modulo torsion dans $C \times \widetilde{E}$. On obtient donc

$$\sum_{g\in G} g(c, e) \equiv \sum_{g\in G} (g_1c, e) \in \mathrm{CH}_0(C \times \widetilde{E}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Or on sait que $\sum_{g\in G} g_1c \in \mathrm{CH}_0(C)$ est une constante α indépendante de c. En conclusion, dans le groupe

$$\mathrm{CH}_0(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{CH}_0(C \times \widetilde{E})^G \otimes \mathbb{Q}$$

on a l'égalité

$$\sum_{g\in G} g(c, e) = \sum_{g\in G} (g_1c_0, e),$$

où c_0 est un point fixé de C. Comme $\pi^*\mathrm{CH}_0(X)$ est engendré par les cycles de la forme $\sum_{g\in G} g(c, e)$, où $\pi : C \times \widetilde{E} \to X$ est l'application quotient, et qu'on a par ailleurs $\pi_* \circ \pi^* = d^0\pi Id_{\mathrm{CH}_0(X)}$, on conclut que $\mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est supporté sur l'image de la courbe $c_0 \times \widetilde{E}$ dans X. Ceci montre que $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension finie et donc que alb_X est un isomorphisme par le théorème de Roitman 1.11.

b) $q(X) = 0$. Par les théorèmes 2.5 et 2.7 on voit que X possède un pinceau de courbes elliptiques. (Dans le cas des surfaces d'Enriques, cela résulte de l'étude du groupe de Picard.) Après éclatement du lieu de base, un tel pinceau fournit une fibration

$$X \to \mathbb{P}^1$$

en courbes elliptiques. Soit J la fibration jacobienne associée. On a déjà vu que $\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}_0(J)$. On a par ailleurs le résultat suivant

Proposition 2.11 *Si $p_g(X) = q(X) = 0$ on a $p_2(J) = q(J) = 0$.*

Cette proposition se montre en utilisant l'étude du fibré canonique d'une fibration elliptique menée par Kodaira [72]. La disparition des fibres multiples dans la fibration jacobienne montre alors que $p_g(J) = 0 \Rightarrow p_2(J) = 0$. ∎

Le théorème de Castelnuovo 2.4 s'applique alors à J et montre que J est rationnelle. Donc on a $\mathrm{CH}_0(J) = \mathbb{Z} = \mathrm{CH}_0(X)$ et la conjecture de Bloch est satisfaite par X. ∎

2.1.4 Surfaces de Godeaux

On va considérer ici les deux familles suivantes de surfaces de type général satisfaisant la condition $p_g = 0$. (On peut trouver d'autres constructions dans [90] par exemple.)

a) Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ muni de l'action suivante du groupe $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Soit g un générateur de G et, choisissant une inclusion $G \subset \mathbb{C}^*$, soit $\eta \in \mathbb{C}^*$ la racine cinquième de l'unité correspondant à g. L'action de $g \in G$ est alors donnée sur les coordonnées homogènes $X_0, \ldots, X_3$ par

$$g^* X_i = \eta^i X_i,\ i = 0, \ldots, 3. \tag{2.1.2}$$

On a le lemme suivant

Lemme 2.12 *Si $F \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5))$ est un polynôme invariant sous G générique, la surface $S = V(F)$ est lisse, l'action de G sur S est sans point fixe et la surface $\Sigma = S/G$ est lisse de type général et satisfait $H^0(\Sigma, K_\Sigma) = 0$.*

Démonstration. Comme l'espace $H := H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5))^G$ des polynômes invariants sous G contient les X_i^5, il est sans points de base, et donc par le lemme de Bertini, la surface S est lisse pour F générale. Un calcul local montre alors que F ne peut pas s'annuler aux points fixes $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de l'action de G sur $\mathbb{P}^3$, de sorte que l'action de G sur S est libre. La surface Σ est donc lisse de type général, comme S, et satisfait

$$H^0(\Sigma, K_\Sigma) = H^0(S, K_S)^G.$$

Enfin l'action de $g \in G$ sur le générateur $\Omega = \sum_i (-1)^i X_i dX_0 \wedge \ldots d\hat{X}_i \ldots \wedge dX_3$ de $H^0(\mathbb{P}^3, K_{\mathbb{P}^3}(4))$ est donnée par $g^*\Omega = \eta^6\Omega = \eta\Omega$. Donc si

$$\omega = Res_S P\Omega/F \in H^0(S, K_S),$$

où P est un polynôme homogène de degré 1, on a

$$g^*\omega = \eta Res_S g^* P\Omega/F.$$

Mais d'après (2.1.2) g^* ne possède pas la valeur propre $\eta^{-1} = \eta^4$ sur $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, et donc on a bien $H^0(S, K_S)^G = 0$. ∎

b) Un exemple similaire est fourni en considérant l'action de $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{P}^6$ donnée par

$$g^*X_i = \eta^i X_i,\ 0 \leq i \leq 6,$$

où η est une racine primitive 8-ième de l'unité. On considère alors les surfaces S intersections complètes de quatre quadriques Q_i, $i = 1\ldots, 4$ satisfaisant

$$g^*Q_1 = Q_1,\ g^*Q_2 = \eta^2 Q_2,\ g^*Q_3 = \eta^4 Q_4,\ g^*Q_4 = \eta^6 Q_4.$$

On a comme précédemment

Lemme 2.13 *Si les Q_i sont génériques, la surface $S = \cap_i V(Q_i)$ est lisse, l'action de G sur S est sans point fixe et la surface $\Sigma = S/G$ est lisse de type général et satisfait $H^0(\Sigma, K_\Sigma) = 0$.*

Comme les surfaces intersections complètes dans l'espace projectif satisfont par le théorème de Lefschetz la condition $H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$, les surfaces Σ construites ci-dessus satisfont la condition $\mathrm{Alb}\,\Sigma = 0$. La conjecture de Bloch prédit donc que ces surfaces satisfont $\mathrm{CH}_0(\Sigma) = \mathbb{Z}$. Ceci est montré dans [66] pour certaines de ces surfaces et dans [108] en général

Théorème 2.14 *Les surfaces de Godeaux construites dans les exemples a) et b) ci-dessus satisfont* $\mathrm{CH}_0(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. On va faire la démonstration dans le cas a), l'autre cas étant similaire. Notons d'abord que l'on a un isomorphisme naturel

$$\pi^* : \mathrm{CH}_0(\Sigma) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{CH}_0(S)^G_{\mathbb{Q}}$$

où $\pi : S \to \Sigma$ est l'application quotient. En effet π^* est injective sur les groupes de Chow rationnels, puisque $\pi_* \circ \pi^*$ est égal à la multiplication par $d^0\pi = 5$. Par ailleurs si $z = \sum_i n_i x_i \in \mathrm{CH}_0(S)^G$, on a

$$5z = \sum_{g \in G} g_* z = \sum_i n_i G x_i \in \pi^* \mathrm{CH}_0(\Sigma),$$

où Gx_i est le cycle de S donné par l'orbite de x_i. Donc π^* est aussi surjective sur les groupes de Chow rationnels.

D'autre part, si

$$cl : \mathrm{CH}_0(\Sigma)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q} = H^4(\Sigma, \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme, il en va de même par le théorème de Roitman 1.14 de l'application

$$cl : \mathrm{CH}_0(\Sigma) \to \mathbb{Z} = H^4(\Sigma, \mathbb{Z}).$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\mathrm{CH}_0(S)^G_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Notons maintenant que si x, y sont deux points génériques de S, il existe un élément G-invariant $F' \in H$ définissant une surface S' lisse et G-invariante tel que la courbe $C := S \cap S'$ soit lisse (et G-invariante) et contienne x et y. Cela résulte immédiatement du lemme de Bertini et du fait que l'application de $\mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^M$ fournie par le système linéaire $H \subset H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(5))$ est finie sur son image. Soit $j : C \to S$ l'inclusion. Clairement le cycle $Gx - Gy$ appartient à

$$\mathrm{Im}\,(j_* : \mathrm{CH}_0(C)^G_{hom} \to \mathrm{CH}_0(S)^G_{hom}).$$

Comme les cycles de la forme $Gx - Gy$, avec x, y génériques dans S, engendrent

$$\mathrm{CH}_0(S)^G_{hom} \otimes \mathbb{Q} = \pi^* \mathrm{CH}_0(\Sigma)_{\mathbb{Q}}$$

il suffit de montrer que pour C comme ci-dessus l'application

$$j_* : \mathrm{CH}_0(C)^G_{hom} \to \mathrm{CH}_0(S)^G_{hom}$$

est nulle.

On a d'abord le résultat suivant

Proposition 2.15 *Soit $(S_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ le pinceau de surfaces engendré par S et S'. Soit $j_t : C \hookrightarrow S_t$ l'inclusion, pour $t \in \mathbb{P}^1$. Alors $\mathrm{CH}_0(C)^G_{hom}$ est engendré par les cycles de la forme $j_t^* D_t$, où D_t est un diviseur G-invariant de degré 0 sur S_t.*

Remarque 2.16 *La surface S_t n'est pas nécessairement lisse mais l'application j_t^* est bien définie du fait que $C \subset S_t$ est un diviseur de Cartier, ou encore plus simplement du fait que S_t est lisse le long de C, de sorte que l'on peut remplacer* $\mathrm{Im}\, j_t^*$ *par* $\mathrm{Im}\, \tilde{j}_t^*$ *où $\tilde{j}_t : C \subset \widetilde{S}_t$ est l'inclusion de C dans une désingularisation de S_t.*

Admettant la proposition 2.15, on conclut en observant que si

$$k : S \hookrightarrow \mathbb{P}^3,\ k_t : S_t \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

sont les inclusions naturelles, on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{j} & S \\ j_t \downarrow & & \downarrow k \\ S_t & \xrightarrow{k_t} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

qui identifie les fibrés normaux de C dans S et de S_t dans $\mathbb{P}^3$, de sorte que l'on a l'égalité (cf [43])

$$j_* \circ j_t^* = k^* \circ k_{t*} : \mathrm{CH}_1(S_t) \to \mathrm{CH}_0(S).$$

Mais comme $\mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^3)_{hom} = 0$ par le théorème **??**, on a $k_{t*}(D_t) = 0$ dans $\mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^3)$ pour tout diviseur D_t de degré 0 sur S_t. Donc $j_* \circ j_t^* D_t = 0$ pour un tel diviseur, et par la proposition 2.15 il en résulte que

$$j_* : \mathrm{CH}_0(C)^G_{hom} \to \mathrm{CH}_0(S)^G_{hom}$$

est nulle. ■

Preuve de la proposition 2.15.
Soit $\widetilde{\mathbb{P}}^3$ l'éclatement de $\mathbb{P}^3$ le long de C et

$$f : \widetilde{\mathbb{P}}^3 \to \mathbb{P}^1$$

l'application donnée par le pinceau de surfaces $(S_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$. On sait d'après le théorème **??** que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{CH}_0(C)^G_{hom} \cong \mathrm{CH}_1(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G_{hom}, \tag{2.1.3}$$

où G agit naturellement sur $\widetilde{\mathbb{P}}^3$ par fonctorialité des éclatements. Si D_t est un diviseur $G-$invariant de degré 0 sur S_t cet isomorphisme envoie $j_t^* D_t$ sur la classe de $\tilde{k}_{t*} D_t$ où $\tilde{k}_t$ est l'inclusion de S_t dans $\widetilde{\mathbb{P}}^3$. Par ailleurs l'isomorphisme (2.1.3) s'identifie par l'application d'Abel-Jacobi à l'isomorphisme correspondant des jacobiennes intermédiaires

$$J(C)^G \cong J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G.$$

Il suffit donc de montrer que les invariants d'Abel-Jacobi

$$\Phi^2_{\widetilde{\mathbb{P}}^3}(\tilde{k}_{t*} D_t) \in J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)_G,$$

pour D_t un diviseur $G-$invariant de degré 0 sur S_t, engendrent $J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G$.

Les surfaces lisses S_t du pinceau satisfont la propriété que $H^{2,0}(S_t)^G = 0$. Par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, la cohomologie $H^2(S_t, \mathbb{Z})^G$ est donc engendrée par les classes de diviseurs G-invariants sur S_t. Comme ce groupe est de type fini, il est engendré par un nombre fini de classes de tels diviseurs. Soit maintenant $U \subset \mathbb{P}^1$ l'ouvert paramétrant les surfaces S_t lisses. Un argument faisant intervenir les schémas de Hilbert relatifs montre qu'il existe une courbe lisse

$$D \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1$$

telle que la fibre $r^{-1}(t) = \{d_{1,t}, \ldots, d_N, t\}$ paramètre des diviseurs $G-$invariants $D_{1,t}, \ldots, D_{N,t}$ sur la fibre S_t dont les classes de cohomologie engendrent la cohomologie invariante $H^2(S_t, \mathbb{Z})^G$ pour tout $t \in U$.

Soit

$$\alpha : R^0 r_* \mathbb{Z} \to R^2 f_* \mathbb{Z}^G$$

le morphisme de systèmes locaux sur U qui envoie la classe $[d_{i,t}] \in H^0(D_t, \mathbb{Z})$ du point $d_{i,t} \in D_t = r^{-1}(t)$ sur la classe $[D_{i,t}] \in H^2(S_t, \mathbb{Z})^G$ du cycle $D_{i,t} \subset S_t = f^{-1}(t)$. Par définition α est surjectif sur U et induit donc une application surjective

$$H^1(\alpha) : H^1(U, R^0 r_* \mathbb{Z}) \to H^1(U, R^2 f_* \mathbb{Z}^G)$$

du fait que U a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension 1.

Notons que l'on dispose d'un cycle de codimension 1

$$\mathcal{D} \subset D \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathbb{P}}^3$$

de fibre $D_{i,t} \subset S_t$ au dessus du point $d_{i,t} \in D$ et que α s'identifie à l'image de classe de cohomologie

$$[\mathcal{D}] \in H^2(D \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})$$

dans $H^0(U, R^2 f'_* \mathbb{Z})$, où $f' : D \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathbb{P}}^3 \to \mathbb{P}^1$ est l'application naturelle, de fibre $r^{-1}(t) \times f^{-1}(t)$. Par l'inclusion

$$D \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathbb{P}}^3 \subset D \times \widetilde{\mathbb{P}}^3,$$

$\mathcal{D}$ fournit aussi un cycle $\mathcal{D} \subset D \times \widetilde{\mathbb{P}}^3$ de codimension 2. On en déduit facilement le résultat suivant

Lemme 2.17 *Soit $0 \in D$ un point de référence, $0' = r(0) \in \mathbb{P}^1$, et soit*

$$\beta : JD \to J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G$$

le morphisme induit par l'application d'Abel-Jacobi de $\widetilde{\mathbb{P}}^3$ et le cycle $\mathcal{D} \subset D \times \widetilde{\mathbb{P}}^3$

$$\beta(alb\,(d-0)) = \Phi^2_{\widetilde{\mathbb{P}}^3}(k_{t*}D_d - k_{0'*}D_0),\ d \in D,\ t = r(d).$$

Alors le morphisme de structures de Hodge

$$\beta_{\mathbb{Z}} : H^1(D, \mathbb{Z}) \to H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})^G$$

correspondant rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{cccc} \beta_{\mathbb{Z}} : & H^1(D,\mathbb{Z}) & \to & H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Z})^G \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & H^1(r^{-1}(U),\mathbb{Z}) & \to & H^3(f^{-1}(U),\mathbb{Z})^G \\ & || & & || \\ H^1(\alpha) : & H^1(U, R^0 r_* \mathbb{Z}) & \to & H^1(U, R^2 f_* \mathbb{Z})^G \end{array}, \tag{2.1.4}$$

(où les flèches verticales du haut sont les restrictions, et les égalités verticales sont données par les suites spectrales de Leray pour r et f et le fait que sur U, on a

$$R^1 r_* \mathbb{Z} = 0,\ R^3 f_* \mathbb{Z} = 0.)$$

Démonstration. En effet, on sait que $\beta_{\mathbb{Z}}$ est le morphisme de structures de Hodge induit par la composante de Künneth de type $(1,3)$ de la classe de Hodge

$$[\mathcal{D}] \in H^4(D \times \widetilde{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})$$

(cf [103], 12.2.1). La compatibilité du diagramme 2.1.4 vient alors du fait que le morphisme α est induit par l'image de

$$[\mathcal{D}] \in H^2(D \times_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})$$

dans

$$H^0(R^2 f'_* \mathbb{Z}) = Hom\,(R^0 r_* \mathbb{Z}, R^2 f_* \mathbb{Z}).$$

∎

On voit aisément que $H^1(\alpha)$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes et comme $H^1(\alpha)$ est surjectif, on conclut que l'application composée

$$H^1(D,\mathbb{Q}) \stackrel{\beta_{\mathbb{Q}}}{\to} H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Q})^G \to H^3(f^{-1}(U),\mathbb{Q})^G$$

est aussi surjective. Cela résulte en effet du caractère strict des morphismes de structures de Hodge mixtes (théorème **??**) et du fait que

$$\mathrm{Im}\,(H^1(D,\mathbb{Q}) \to H^1(r^{-1}(U),\mathbb{Q})) = W_0H^1(r^{-1}(U),\mathbb{Q}),$$

$$\mathrm{Im}\,(H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Q})^G \to H^3(f^{-1}(U),\mathbb{Q})^G) = W_0H^3(f^{-1}(U),\mathbb{Q})^G.$$

Mais d'autre part le noyau de l'application de restriction

$$H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Q})^G \to H^3(f^{-1}(U),\mathbb{Q})^G$$

est engendré par les images des $\tilde{k}_{t_i\,*} : H^1(\widetilde{S}_{t_i},\mathbb{Q})^G \to H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Q})^G$, où t_i parcourt l'ensemble des valeurs critiques du pinceau. On en déduit que l'application

$$\beta_{\mathbb{Q}} \oplus_i \tilde{k}_{t_i\,*} : H^1(D,\mathbb{Q}) \oplus_i H^1(\widetilde{S}_{t_i},\mathbb{Q})^G \to H^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3,\mathbb{Q})^G$$

est surjective. Or $\beta_{\mathbb{Q}} \oplus_i \tilde{k}_{t_i\,*}$ est le morphisme de structures de Hodge correspondant au morphisme de variétés abéliennes

$$\beta \oplus_i \Phi^2_{\widetilde{\mathbb{P}}^3} \circ \tilde{k}_{t_i\,*} : J(D) \oplus_i Pic^0(\widetilde{S}_{t_i}) \to J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G.$$

Donc $\beta \oplus_i \Phi^2_{\widetilde{\mathbb{P}}^3} \circ \tilde{k}_{t_i\,*}$ est surjectif, ce qui signifie que les invariants d'Abel-Jacobi des combinaisons homologues à 0 des 1-cycles de la forme $k_{t*}D_t$ ou $\tilde{k}_{t_i\,*}D_{t_i}$ pour D_t, D_{t_i} des diviseurs G-invariants, engendrent $J^3(\widetilde{\mathbb{P}}^3)^G$. La proposition 2.15 est donc montrée. ∎

2.2 Filtration sur les groupes de Chow

2.2.1 La conjecture de Bloch généralisée

Si S, T sont des surfaces projectives lisses et Γ est un cycle de codimension 2 dans $S\times T$, on dispose du morphisme

$$\Gamma_* : \mathrm{CH}_0(S) \to \mathrm{CH}_0(T)$$

qui est compatible avec l'application cl et plus généralement cl_D (cf section **??**), de sorte que l'on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_* : & \mathrm{CH}_0(S) & \to & \mathrm{CH}_0(T) \\ & \downarrow cl & & \downarrow cl \\ [\Gamma]_* : & H^4(S,\mathbb{Z}) & \to & H^4(T,\mathbb{Z}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_* : & \mathrm{CH}_0(S)_{hom} & \to & \mathrm{CH}_0(T)_{hom} \\ & \downarrow alb_S & & \downarrow alb_T \\ [\Gamma]_* : & \mathrm{Alb}\, S = J^3(S) & \to & \mathrm{Alb}\, T = J^3(T) \end{array} .$$

Ici les applications $[\Gamma]_*$ sont induites par la classe de Hodge de Γ. Une autre façon de formuler ceci consiste à introduire la filtration

$$F^0\mathrm{CH}_0(W)=\mathrm{CH}_0(W),\ F^1\mathrm{CH}_0(W)=\mathrm{CH}_0(W)_{hom},$$
$$F^2\mathrm{CH}_0(W)=\mathrm{Ker}\,alb_W\subset F^1\mathrm{CH}_0(W)$$

pour W une variété lisse projective complexe. Alors le morphisme Γ_* est compatible avec les filtrations F sur $\mathrm{CH}_0(S)$ et $\mathrm{CH}_0(T)$. La proposition 1.24 entraîne alors

Proposition 2.18 *Si Γ_* s'annule sur $F^2\mathrm{CH}_0(S)$, l'application $[\Gamma]^*: H^2(T,\mathbb{C})\to H^2(S,\mathbb{C})$ s'annule sur $H^{2,0}(T)$.*

Démonstration. En effet, soit $j:C\hookrightarrow S$ une courbe ample lisse. On sait par le théorème de Lefschetz que l'application $j_*:\mathrm{Alb}\,C\to\mathrm{Alb}\,S$ est surjective. Si l'application Γ_* s'annule sur $F^2\mathrm{CH}_0(S)$, on a donc $\mathrm{Ker}\,\Gamma_*+\mathrm{Im}\,j_*=\mathrm{CH}_0(S)$ et

$$\mathrm{Im}\,\Gamma_*=\Gamma_*(j_*\mathrm{CH}_0(C))=\mathrm{Im}\,\Gamma_{C*},$$

où $\Gamma_C=\Gamma_{|C\times T}$ est la restriction de Γ à C. Mais Γ_C est un 1-cycle dans $C\times T$, et donc son support est une courbe qui se projette sur une courbe C' de T. Clairement $\mathrm{Im}\,\Gamma_{C*}$ est constitué de cycles supportés sur C'. Donc $\mathrm{Im}\,\Gamma_*$ est constitué de cycles supportés sur C' et on peut appliquer La proposition 1.24, qui montre que

$$[\Gamma]^*:H^{2,0}(T)\to H^{2,0}(S)$$

est nul.

∎

La conjecture 2.2 est un cas particulier de la conjecture suivante, réciproque de la proposition 2.18

Conjecture 2.19 *Si le cycle $\Gamma\subset S\times T$ de codimension 2 satisfait la condition $[\Gamma]^*=0$ sur $H^0(T,\Omega_T^2)$, le morphisme*

$$\Gamma_*:\mathrm{CH}_0(S)\to\mathrm{CH}_0(T)$$

s'annule sur le sous-groupe $F^2\mathrm{CH}_0(S)$.

Remarque 2.20 *Définissons $H^2(T,\mathbb{Q})_{tr}$ comme la plus petite sous structure de Hodge de $H^2(T,\mathbb{Q})$ contenant $H^{2,0}(T)$. (Par le fait que la forme d'intersection sur $H^2(T)$ est non dégénérée sur $H^{2,0}(T)\oplus H^{0,2}(T)$ (cf [103]), $H^2(T,\mathbb{Q})_{tr}$ s'identifie aussi à l'orthogonal du sous-groupe $NS(T)=Hdg^2(T)$ dans $H^2(T,\mathbb{Q})$.)*

Alors la condition $[\Gamma]^*=0$ sur $H^0(T,\Omega_T^2)$ équivaut à $\Gamma^*=0$ sur $H^2(T,\mathbb{Q})_{tr}$, par définition de $H^2(T,\mathbb{Q})_{tr}$ et par le fait que Γ^* est un morphisme de structures de Hodge, de sorte que son noyau est une sous-structure de Hodge de $H^2(T,\mathbb{Q})$.

En utilisant la décomposition de Künneth de $[\Gamma]$, et le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, on peut montrer que cette hypothèse équivaut aussi au fait qu'il existe des cycles Z_1, Z_2 supportés dans $C\times T$ et $S\times D$ respectivement, où C est une courbe contenue dans S et D est une courbe contenue dans T, tels qu'un multiple de Γ est cohomologue à Z_1+Z_2. Il faut utiliser pour cela le fait que les composantes de Künneth de type $(1,3)$ et $(3,1)$ de $[\Gamma]$ sont des classes de cycles algébriques supportés sur des sous-variétés de la forme $S\times D$ et $C\times T$ respectivement (cf [85] et chapitre 9, exercice 2).

La conjecture de Bloch pour les surfaces S telles que $p_g(S) = 0$ s'obtient en prenant dans la conjecture 2.19

$$T = S,\, \Gamma = diag\, S \cong S \subset S \times S.$$

Alors $\Gamma_* = Id$ et $\Gamma_* = 0$ sur $F^2\mathrm{CH}_0(S)$ équivaut à $F^2\mathrm{CH}_0(S) = 0$.

2.2.2 Filtration conjecturale sur les groupes de Chow

Plus généralement, Bloch et Beilinson ont formulé la conjecture suivante (cf [67])

Conjecture 2.21 *Si X est une variété projective lisse, il existe pour chaque entier k une filtration décroissante $F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}$ sur les groupes de Chow à coefficients rationnels $\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{CH}^k(X) \otimes \mathbb{Q}$, qui satisfait les propriétés suivantes*

1. $F^{k+1}\mathrm{CH}^k(X) = 0$.
2. *La filtration F^i est stable sous les correspondances: si $\Gamma \in \mathrm{CH}^l(X \times Y)$, les applications*
$$\Gamma_* : \mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}^{k+l-\dim X}(Y)_{\mathbb{Q}}$$
satisfont
$$\Gamma_*(F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}) \subset F^i\mathrm{CH}^{k+l-\dim X}(Y)_{\mathbb{Q}}.$$
3. *L'application induite*
$$Gr_F^i\Gamma_* : Gr_F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} \to Gr_F^i\mathrm{CH}^{k+l-n}(Y)_{\mathbb{Q}},\; n = \dim X$$
s'annule si la composante de Künneth de bidegré $(2n-2k+i, 2l-2n+2k-i)$ de la classe de Γ est nulle dans $H^{2l}(X \times Y, \mathbb{Q})$, c'est-à-dire
$$0 = [\Gamma]_* : H^{2k-i}(X, \mathbb{Q}) \to H^{2k+2l-2n-i}(Y, Q).$$

On peut raffiner encore cette conjecture en remplaçant la condition 3 par
3'. L'application induite

$$Gr_F^i\Gamma_* : Gr_F^i\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}} \to Gr_F^i\mathrm{CH}^{k+l-n}(Y)_{\mathbb{Q}},\; n = \dim X$$

s'annule si l'application

$$[\Gamma]_* : H^{2k-i}(X, \mathbb{Q}) \to H^{2k+2l-2n-i}(Y, Q).$$

s'annule sur $H^{r,s}(X)$, $s \leq k-i$.

Par exemple, dans le cas du groupe CH_0, la conjecture 2.21 prédit que le gradué du groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ est contrôlé par les formes holomorphes sur X de la façon suivante :

Conjecture 2.22 *Il existe une filtration $F^i\mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}}$ telle que $F^{n+1}\mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}} = 0$, $n = \dim X$, pour toute variété projective lisse X, stable par correspondance et satisfaisant la propriété suivante :*
(*) Pour $\Gamma \subset X \times Y$ une correspondance de codimension $m = \dim Y$ l'application

$$Gr_F^i\Gamma_* : Gr_F^i\mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}} \to Gr_F^i\mathrm{CH}_0(Y)_{\mathbb{Q}}$$

est nulle si et seulement si

$$[\Gamma]^* : H^0(Y, \Omega_Y^i) \to H^0(X, \Omega_X^i)$$

est nulle.

(Noter ici pour retrouver la condition 3' que $[\Gamma]^*$ est dual de

$$[\Gamma]_* : H^n(X, \Omega_X^{n-i} \to H^m(Y, \Omega_Y^{m-i}),\ m = \dim Y,$$

qui est aussi le conjugué complexe de

$$[\Gamma]_* : H^{n,n-i}(X) \to H^{m,m-i}(Y).)$$

Cette conjecture 2.22 entraînerait le résultat suivant, réciproque du théorème 1.31

Conjecture 2.23 *Si la variété projective lisse X satisfait $H^{p,q}(X) = 0$, $p \neq q$, $q \leq k$, l'application*

$$cl : \mathrm{CH}_l(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2n-2l}(X, \mathbb{Q})$$

est injective pour $l \leq k$.

Preuve de l'implication 2.22 $\Rightarrow$ 2.23. La démonstration se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, la conjecture 2.22 appliquée à la diagonale $diag\, X \subset X \times X$ dit que si $H^0(X, \Omega_X^i) = 0$, $\forall i \neq 0$, les groupes $Gr_F^i \mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}}$ sont nuls pour $i \neq 0$, et comme la filtration est finie ceci entraîne que $cl : \mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2n}(X, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme, puisqu'il est clair par la condition (*) sur la filtration F que $\mathrm{CH}_0(X)_{hom} \subset F^1\mathrm{CH}_0(X)$.

Supposons donc la conjecture 2.23 vraie pour $k-1$ et soit X satisfaisant l'hypothèse $H^{p,q}(X) = 0$, $p \neq q$, $q \leq k$. Par hypothèse de récurrence

$$cl : \mathrm{CH}_l(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2n-2l}(X, \mathbb{Q})$$

est injective pour $l \leq k-1$. On peut donc appliquer le théorème 1.29, qui fournit une décomposition

$$m\Delta = \sum_{i \leq k-1} Z_i \oplus Z \in \mathrm{CH}^n(X \times X) \tag{2.2.5}$$

où les Z_i sont de la forme $\sum_j n_j W_{ij} \times W'_{ij}$ avec $\dim W'_{ij} = i$ et $\dim W_{ij} = n - i$ et Z est supporté sur $T \times X$ avec $\operatorname{codim} T = k$.

Soit $\tau : \widetilde{T} \to T \to X$ une désingularisation de T et soit $\widetilde{Z}$ un cycle de dimension n tel que $(\tau, Id)_*\widetilde{Z} = Z$. La formule (2.2.5) montre que pour $W \in \mathrm{CH}_k(X)$ on a

$$mW = m\Delta_* W = (\widetilde{Z}_* \circ \tau^*)W. \tag{2.2.6}$$

Considérons la correspondance de dimension $n - k = \dim \widetilde{T}$

$$Z' = (Id, \tau^*)\widetilde{Z} \subset \widetilde{T} \times \widetilde{T}.$$

Son action sur les 0-cycles de $\widetilde{T}$ est donnée par

$$Z'_*\alpha = \tau^* \widetilde{Z}_* \alpha.$$

On a donc d'après (2.2.6)

$$Z'_*\tau^*W = m\tau^*W,\ W \in \mathrm{CH}_k(X)$$

et donc

$$\widetilde{Z}_*(Z'_*\tau^*W) = m(\widetilde{Z} \circ \tau^*)W = m^2W,\ W \in \mathrm{CH}_k(X).$$

On montre de même que si $Z'^{(l)} := Z'^{ol} \in \mathrm{CH}_{n-k}(\widetilde{T} \times \widetilde{T})$ on a

$$\widetilde{Z}_*(Z'^{(l)}_*\tau^*W) = m^{l+1}W,\ W \in \mathrm{CH}_k(X).$$

Pour conclure que

$$cl : \mathrm{CH}_k(X)_{\mathbb{Q}} \to H^{2n-2k}(X, \mathbb{Q})$$

est injective, il suffit donc de prouver que pour un entier l, $Z'^{(l)}_*$ annule $\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom}$. Mais l'hypothèse $H^{p,q}(X) = 0$ pour $p > q$, $q \leq k$ montre immédiatement que la correspondance Z' agit trivialement sur $H^{l,0}(\widetilde{T})$ pour tout $l \neq 0$ et donc la conjecture 2.22 entraîne que Z'_* agit trivialement sur les gradués $Gr^i_F\mathrm{CH}_0(T)$, $i > 0$. Mais alors Z'_* est nilpotent sur $\mathrm{CH}_0(T)_{hom}$ puisque la filtration est finie. Donc il existe bien un l tel que $Z'^{(l)}_* = (Z'_*)^{ol}$ annule $\mathrm{CH}_0(\widetilde{T})_{hom}$. ∎

2.2.3 Filtration de S.Saito

Dans [96], Shuji Saito construit une filtration $F^i\mathrm{CH}^k(X)$ sur les groupes de Chow d'une variété projective X qui satisfait les propriétés 2 et 3 de la conjecture 2.21. Malheureusement la propriété de finitude $F^{k+1}\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}$ reste totalement incomprise. On peut seulement dire que le sous-groupe $F^{k+1}\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}$ est la partie du groupe de Chow $\mathrm{CH}^k(X)_{\mathbb{Q}}$ qui ne gouverne en aucune façon la théorie de Hodge de X. Sa construction est grosso modo la suivante. Supposons construits les groupes $F^{i-1}\mathrm{CH}^p(Y)_{\mathbb{Q}}$ pour tout p et toute variété projective lisse Y. Définissons alors $F^i\mathrm{CH}^k(X)$ comme le sous-groupe de $F^{i-1}\mathrm{CH}^k(X)$ engendré par les images $\Gamma_*(F^{i-1}\mathrm{CH}^{\dim Y - r + k}(Y)_{\mathbb{Q}})$ pour les correspondances $\Gamma \subset \mathrm{CH}^r(Y \times X)$ satisfaisant la propriété :

La composante de Künneth de bidegré $(2r - 2k + i, 2k - i)$ de la classe de Γ est nulle dans $H^{2r}(Y \times X, \mathbb{Q})$, c'est-à-dire

$$\Gamma_* : H^{2\dim Y - 2r + 2k - i}(Y, \mathbb{Q}) \to H^{2k-i}(X, Q)$$

est nulle.

On peut éventuellement raffiner cette définition en demandant seulement que Γ_* s'annule sur les $H^{p,q}$ avec $q \leq \dim Y - r + k - i$ mais conjecturalement la filtration obtenue doit rester la même.

Saito montre que sa filtration est la filtration minimale satisfaisant les propriétés 2 et 3 de la conjecture 2.21.

Dans [87], Murre propose par ailleurs de définir la filtration F sur les groupes de Chow $\mathrm{CH}(X)$ à l'aide d'une décomposition (conjecturale) de la diagonale

$$diag\, X \in \mathrm{CH}(X \times X)_{\mathbb{Q}}$$

en somme de projecteurs. Une telle décomposition existe pour les courbes, les surfaces et certaines variétés de dimension 3 (cf chapitre 9, exercice 2).

2.3 Cas des variétés abéliennes

2.3.1 Produit de Pontrjagin

Si A est une variété abélienne de dimension g, c'est-à-dire un tore complexe qui est une variété projective (cf [103], 7.2.2), la structure de groupe sur A permet de mettre des structures supplémentaires sur les groupes de Chow de A et d'obtenir des résultats en direction de la conjecture 2.21.

Notons $\mu : A \times A \to A$ l'application somme

$$\mu(z, z') = z + z'.$$

Si $Z = \sum_i n_i Z_i \in \mathcal{Z}_k(A)$, $Z' = \sum_j m_j Z'_j \in \mathcal{Z}_l(A)$ on note

$$Z \times Z' := \sum_{i,j} n_i m_j Z_i \times Z_j \in \mathcal{Z}_{k+l}(A \times A).$$

On voit facilement que l'application bilinéaire

$$\mathcal{Z}_k(A) \times \mathcal{Z}_l(A) \to \mathcal{Z}_{k+l}(A \times A),\ (Z, Z') \to Z \times Z'$$

se factorise à travers l'équivalence rationnelle et fournit donc une application bilinéaire que l'on notera de la même manière

$$\mathrm{CH}_k(A) \times \mathrm{CH}_l(A) \to \mathrm{CH}_{k+l}(A \times A).$$

On pose alors

Définition 2.24 *Le produit de Pontrjagin $(Z, Z') \mapsto Z * Z'$ est défini par*

$$Z * Z' = \mu_*(Z \times Z') \in \mathrm{CH}_{k+r}(A),\ Z \in \mathrm{CH}_k(A),\ Z' \in \mathrm{CH}_l(A).$$

Lemme 2.25 *Le produit de Pontrjagin est commutatif et associatif sur* $\mathrm{CH}(A) := \oplus_k \mathrm{CH}_k(A)$.

Démonstration. En effet la commutativité résulte de la commutativité de μ et l'associativité résulte de l'égalité

$$Z * (Z' * Z'') = \mu'_*(Z \times Z' \times Z'') \in \mathrm{CH}_{k+l+r}(A)$$

pour $Z \in \mathrm{CH}_k(A)$, $Z' \in \mathrm{CH}_l(A)$, $Z'' \in \mathrm{CH}_r(A)$, où $\mu' : A \times A \times A \to A$ est l'application somme, $\mu'(z, z', z'') = z + z' + z''$. Ici comme précédemment le produit $Z \times Z' \times Z''$ est obtenu par trilinéarité à partir des produits $Z \times Z' \times Z''$ pour trois sous-variétés de A. ∎

2.3.2 Résultats de Bloch

Bloch [12] utilise le produit de Pontrjagin pour mettre une filtration $F^i\mathrm{CH}_0$ sur les groupes de Chow $\mathrm{CH}_0(A)$ pour A une variété abélienne, satisfaisant une partie des propriétés de la conjecture 2.22. Pour éviter les confusions entre l'addition dans A et l'addition sur $\mathrm{CH}_0(A)$ on notera dans la suite $z \in A$ les points de A et $\{z\} \in \mathrm{CH}_0(A)$ les cycles correspondants.

Notons $I = \mathrm{CH}_0(A)_{hom} \subset \mathrm{CH}_0(A)$. Bloch pose

$$F^i\mathrm{CH}_0(A) = I^{*i} \subset \mathrm{CH}_0(A).$$

On a d'abord

Lemme 2.26 *Soit $\Gamma \subset W \times A$ une correspondance de codimension g. Alors si*

$$\mathrm{Im}\,(\Gamma_* : \mathrm{CH}_0(W) \to \mathrm{CH}_0(A)) \subset F^i\mathrm{CH}_0(A) \tag{2.3.7}$$

on a

$$[\Gamma]^* = 0 : H^0(A, \Omega^l_A) \to H^0(W, \Omega^l_W),\ l < i.$$

Démonstration. Soit $\Gamma'' = \Gamma_{\mu_i} \circ \Gamma_1^i \subset A^i \times A$ la correspondance composée du graphe $\Gamma_{\mu_i} \subset A^i \times A$ de l'application somme $\mu_i : A^i \to A$, et de la correspondance $\Gamma_1^i \subset (A \times A)^i \cong A^i \times A^i$, où $\Gamma_1 := \Delta_A - A \times 0$. En d'autres termes, on a

$$\Gamma_{1*}(\{z\}) = \{z\} - \{0\} \in \mathrm{CH}_0(A)_{hom},\ z \in A,$$

$$\Gamma^i_{1*}(\{(z_1, \ldots, z_i)\}) = (\{z\}_1 - \{0\}) \times \ldots \times (\{z\}_i - \{0\}) \in \mathrm{CH}_0(A^i),$$

$$\Gamma_{\mu_i *}(\{(z_1, \ldots, z_i)\}) = \{z_1 + \ldots + z_i\}$$

et donc

$$\Gamma''_*(\{(z_1, \ldots, z_i)\}) = (\{z_1\} - \{0\}) * \ldots * (\{z_i\} - \{0\}).$$

On montrera plus loin le lemme suivant

Lemme 2.27 *Sous la condition (2.3.7), il existe une correspondance $\Gamma' \subset W \times A^i$, un entier $N \neq 0$, et un ouvert de Zariski dense $W_0 \subset W$ tels que*

$$N\Gamma = \Gamma'' \circ \Gamma' \text{ dans } CH^g(W_0 \times A). \tag{2.3.8}$$

En admettant ce lemme, on a alors

$$N[\Gamma]^* = [\Gamma']^* \circ [\Gamma'']^* : H^0(A, \Omega^l_A) \to H^0(W_0, \Omega^l_{W_0}).$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour $\Gamma = \Gamma''$.

Or on a pour $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_l \in H^0(A, \Omega^l_A)$

$$\mu_i^*\omega = \sum_K p^*_{k_1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge p^*_{k_l}\alpha_l$$

où K parcourt l'ensemble des l-uplets $k_1, \ldots, k_l$ d'éléments de $\{1, \ldots, i\}$. Si $l < i$, chaque forme $\alpha_K = p^*_{k_1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge p^*_{k_l}\alpha_l$ est un pull-back $p^*_s\eta$, pour au moins un s, où $p_s : A^i \to A^{i-1}$ est la projection oubliant le s-ième facteur, et donc on a

$$\alpha_K = p^*_s(\alpha_{K|A\times\ldots 0\ldots\times A})$$

où le 0 est mis sur le s-ième facteur. Cela entraîne immédiatement que α_L est annulée par $[\Gamma^i_1]^*$. Donc $\mu^*_i\omega$ est annulée par $[\Gamma^i_1]^*$ et ω est annulée par $[\Gamma'']^*$. ∎

Preuve du lemme 2.27. L'hypothèse (2.3.7) dit exactement que pour tout $w \in W$ il existe $z \in CH_0(A^i)$ tel que

$$\Gamma_*(w) = \Gamma'_*(z) \text{ dans } CH_0(A).$$

Introduisons pour chaque paire d'entiers (j, j') le sous-ensemble $R_{j,j'} \subset W \times S^j A^i \times S^{j'} A^i$ défini par

$$R_{j,j'} = \{(w, z, z'), \Gamma_*(w) = \Gamma'_*(z - z') \text{ dans } CH_0(A)\}. \tag{2.3.9}$$

(Ici, pour éviter une notation trop lourde, nous utilisons la notation $S^j X$ pour le produit symétrique j-ième noté plus haut $X^{(j)}$ de X.) On sait que les $R_{j,j'}$ sont des unions dénombrables de sous-ensembles algébriques fermés de $W \times S^j A^i \times S^{j'} A^i$. Notre hypothèse est que la réunion sur j, j' des projections sur W des $R_{j,j'}$ est égale à W. Donc il existe une composante algébrique Z d'un ensemble $R_{j,j'}$ qui se projette surjectivement sur W. Quitte à remplacer Z par un sous ensemble algébrique fermé, on peut supposer que la projection

$$p : Z \to W$$

est génériquement finie de degré N. $Z \subset W \times S^j A^i \times S^{j'} A^i$ fournit alors deux correspondances $Z_j \subset W \times S^j A^i$ et $Z_{j'} \subset W \times S^{j'} A^i$ respectivement, de dimension égale à $\dim W$. En composant avec les correspondances naturelles entre $S^j A^i$, $S^{j'} A^i$ respectivement et A^i, on obtient alors

$$\Gamma'_j,\ \Gamma'_{j'} \in \mathrm{CH}_{dim\, W}(W \times A^i).$$

Posons alors

$$\Gamma' = \Gamma'_j - \Gamma'_{j'}.$$

Le fait que $Z \subset R_{j,j'}$ et la définition (2.3.9) montrent alors que pour $w \in W$, on a

$$\Gamma''_*(\Gamma'_*(w)) = N\Gamma_*(w).$$

Le fait que cela entraîne l'égalité (2.3.8) sur un ouvert de W est alors une conséquence du corollaire 1.20.

∎

Le lemme 2.26 montre en particulier que $F^2\mathrm{CH}_0(A) = I^{*2}$ est contenu dans

$$\mathrm{Ker}\,(alb : \mathrm{CH}_0(A)_{hom} = F^1\mathrm{CH}_0(A) \to \mathrm{Alb}\, A = A).$$

En effet, ceci équivaut au fait que pour toute correspondance

$$\Gamma \subset B \times A,\ \dim \Gamma = \dim B$$

telle que $Im\,\Gamma_* \subset F^2\mathrm{CH}_0(A)$, on a $alb_A \circ \Gamma_* = 0$. On voit aisément qu'il suffit de montrer que sous ces hypothèses, l'application holomorphe

$$\phi = alb_A \circ \Gamma_* : B \to \mathrm{Alb}\, A = A$$

est contante.Mais ϕ admet pour différentielle l'application

$$\phi^* : T_B \to T_{A,0} \otimes \mathcal{O}_B$$

duale de l'application

$$\Gamma^* : H^0(A, \Omega_A) \to H^0(B, \Omega_B).$$

Donc le lemme 2.26 montre que ϕ est constante, et le résultat est montré.

On a en fait

Lemme 2.28 *La filtration de Bloch satisfait* $F^2\mathrm{CH}_0(A) = \mathrm{Ker}\, alb$.

Démonstration. L'application alb envoie $\{z\} - \{0\} \in \mathrm{CH}_0(A)_{hom}$ sur

$$z \in A = \mathrm{Alb}\, A$$

et plus généralement $\sum_i \{z_i\} - \{0\}$ sur $\sum_i z_i \in A$. On veut montrer que $\mathrm{Ker}\, alb$ est engendré par les cycles de la forme

$$\{z_1 + z_2\} - \{z_1\} - \{z_2\} + \{0\} = (\{z_1\} - \{0\}) * (\{z_2\} - \{0\}).$$

Or si $z = \sum_{1 \leq i \leq n} \{z_i\} - \sum_{1 \leq i \leq n} \{z'_i\} \in \mathrm{Ker}\, alb$, soit

$$z' = \sum_{3 \leq i \leq n} \{z_i\} - \sum_{3 \leq i \leq n} \{z'_i\} + \{z_1 + z_2\} - \{z'_1 + z'_2\}.$$

Alors $z = z' - (\{z_1 + z_2\} - \{z_1\} - \{z_2\} + \{0\}) + (\{z'_1 + z'_2\} - \{z'_1\} - \{z'_2\} + \{0\})$ et z' est de la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} \{z''_i\} - \sum_{1 \leq i \leq n-1} \{z'''_i\}.$$

Comme $z \in I^{*2}$ si et seulement si $z' \in I^{*2}$, on se ramène par ce qui précède au cas où $n = 2$. Mais alors

$$z = \{z_1\} + \{z_2\} - \{z'_1\} - \{z'_2\}$$

avec $z_1 + z_2 = z'_1 + z'_2$. Donc

$$z = \{z_1\} + \{z_2\} - \{z_1 + z_2\} + \{z'_1 + z'_2\} - \{z'_1\} - \{z'_2\}$$

$$= (\{z_1\} - \{0\}) * (\{z_2\} - \{0\}) - (\{z'_1\} - \{0\}) * (\{z'_2\} - \{0\}).$$

■

La seconde propriété satisfaite par la filtration de Bloch est la suivante

Théorème 2.29 *(Bloch [12]) La filtration de Bloch* $F^i\mathrm{CH}_0(A)$ *satisfait*

$$F^{g+1}\mathrm{CH}_0(A) = 0,\ g = \dim A.$$

La preuve du théorème se fait en deux étapes. On montre d'abord

Lemme 2.30 *Pour* $l > g$, *on a*

$$Gr^l_F\mathrm{CH}_0(A) = 0.$$

Démonstration. Soit $j : C \hookrightarrow A$ une courbe lisse contenue dans A, obtenue comme l'intersection complète d'hypersurfaces amples $H_i \in \mid L \mid$. Alors l'application

$$alb_A \circ j_* \circ j^* : Pic^0(A) \to \mathrm{Alb}\, A$$

est surjective. En effet il suffit de vérifier que le morphisme de structures de Hodge rationnelles correspondant

$$j_* \circ j^* : H^1(A, \mathbb{Q}) \to H^{2g-1}(A, \mathbb{Q})$$

est surjectif. Or c'est un isomorphisme par le théorème de Lefschetz difficile (cf [103], 6.2.3).

Or il résulte du lemme 2.28 que l'application

$$\mathrm{CH}_0(A)^{\otimes i}_{hom} \to F^i\mathrm{CH}_0(A),\ z_1 \otimes \ldots \otimes z_i \mapsto z_1 * \ldots * z_i$$

induit un morphisme surjectif

$$A^{\otimes i} \to Gr^i_F \mathrm{CH}_0(A),$$

puisque ce lemme identifie A à $F^1/F^2\mathrm{CH}_0(A)$.

On conclut donc que $Gr^i_F\mathrm{CH}_0(A)$ est engendré par les cycles de la forme

$$z = (j_* \circ j^* D_1) * \ldots * (j_* \circ j^* D_i),\ D_l \in Pic^0(A).$$

Notons qu'on a aussi par commutativité du produit de Pontrjagin,

$$z = (j_* \circ j^* D_{\sigma(1)}) * \ldots * (j_* \circ j^* D_{\sigma(i)})$$

pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, i\}$. Soit $J : C^i \to A$ le composé de $j^i : C^i \to A^i$ et de $\mu : A^i \to A$.

Ce qui précède et la définition du produit de Pontrjagin montrent que $Gr^i_F\mathrm{CH}_0(A)$ est engendré par les cycles de la forme

$$\begin{aligned} z &= J_*(pr_1^* j^* D_1 \cdot \ldots \cdot pr_i^* \circ j^* D_i) \\ &= J_*(pr_{\sigma(1)}^* j^* D_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot pr_{\sigma(i)}^* j^* D_{\sigma(i)}),\ D_l \in Pic^0 A, \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

où les pr_k sont les projections de C^i sur ses facteurs. Mais l'invariance de $Pic^0 A$ sous l'effet des translations de A montre que

$$J^* D_l = \sum_k (pr_k^* \circ j^*) D_l,\ \forall D_l \in Pic^0 A.$$

On a donc

$$J^*(D_1 \cdot \ldots \cdot D_i) = J^* D_1 \cdot \ldots \cdot J^* D_i = \sum_{\sigma \in S_i} (pr_{\sigma(1)}^* j^* D_1) \cdot \ldots \cdot (pr_{\sigma(i)}^* \circ j^* D_i)$$

où S_i est le groupe symétrique d'ordre i, et donc par (2.3.10)

$$i!z = J_* J^*(D_1 \cdot \ldots \cdot D_i).$$

Donc pour $i > g$, on a $i!z = 0$, c'est-à-dire que le groupe $Gr^i_F\mathrm{CH}_0(A)$ est annulé par $i!$. Comme c'est clairement un groupe divisible, il est nécessairement nul. ∎

On montre enfin pour conclure la preuve du théorème

Lemme 2.31 *Pour N suffisamment grand, on a $F^N\mathrm{CH}_0(A) = 0$.*

Démonstration. Si $\phi : B \to A$ est un morphisme de variétés abéliennes, il est clair que $\phi_* : \mathrm{CH}_0(B) \to \mathrm{CH}_0(A)$ satisfait $\phi_* F^i\mathrm{CH}_0(B) \subset F^i\mathrm{CH}_0(A)$ car ϕ_* est un morphisme d'anneaux pour le produit de Pontrjagin. De plus, si ϕ est surjective, on a en fait $\phi_* F^i\mathrm{CH}_0(B) = F^i\mathrm{CH}_0(A)$ car $\phi_* : \mathrm{CH}_0(B)_{hom} \to \mathrm{CH}_0(A)_{hom}$ est surjectif. Donc si le résultat est vrai pour B il l'est aussi pour A.

Or si $C \subset A$ est une courbe comme plus haut, on sait que $alb_A \circ j_* : J(C) = \mathrm{CH}_0(C)_{hom} \to A$ est surjectif. On peut donc se contenter de montrer le lemme pour $A = J(C)$, avec $j : C \hookrightarrow A$ donnée par l'application d'Albanese de C relative au choix d'un point de référence $c_0 \in C$. Pour $g = g(C) = \dim A$, considérons l'application

$$\Phi : C^{(g)} \to A,\ z \mapsto alb(z - gc_0).$$

On sait que cette application est surjective (cf [103], 12.1.3). Considérons également

$$\Phi' : C^{(g+1)} \to A,\ z \mapsto alb(z - (g+1)c_0).$$

Introduisons la notation suivante : pour L_i, $i = 1, \ldots, k \in \mathrm{CH}_0(C) = Pic\,C$, on définit $L_1 \cdot \ldots \cdot L_k \in \mathrm{CH}_0(C^{(k)})$ par

$$L_1 \cdot \ldots \cdot L_k = p_*(pr_1^* L_1 \cdot \ldots \cdot pr_k^* L_k)$$

où $p : C^k \to C^{(k)}$ est l'application quotient, et les $pr_i : C^k \to C$ sont les projections sur les différents facteurs.

Lemme 2.32 *Le groupe $F^{g+1}\mathrm{CH}_0(A)$ est engendré par les cycles de la forme*

$$\{u\} * \Phi'_*(D_1 \cdot \ldots \cdot D_{g+1}),\ u \in A,\ D_i \in Pic^0(C).$$

Lemme 2.33 *On a $D_1 \cdot \ldots \cdot D_{g+1} = 0$ dans $\mathrm{CH}_0(C^{(g+1)})$.*

Ces deux propriétés entraînent immédiatement que $F^{g+1}\mathrm{CH}_0(A) = 0$, ce qui conclut la preuve du lemme 2.31 et donc du théorème 2.29, moyennant les preuves des lemmes 2.32 et 2.33. ■

Preuve du lemme 2.32 Il est évident que le produit $\cdot$ et le produit de Pontrjagin satisfont

$$\Phi'_*(D_1 \cdot \ldots \cdot D_{g+1}) = (j_* D_1) * \ldots * (j_* D_{g+1})$$

pour $D_1, \ldots, D_{g+1} \in Pic\,C$. Or par définition $F^{g+1}\mathrm{CH}_0(A)$ est engendré par les $Z_1 * \ldots * Z_{g+1}$, avec $Z_i \in \mathrm{CH}_0(A)_{hom}$. Il suffit donc de montrer que les cycles $\{u\} * j_* D$, $D \in Pic^0 C$, $u \in A$ engendrent $\mathrm{CH}_0(A)_{hom}$.

Or $\mathrm{CH}_0(A)_{hom}$ est engendré par les $\{z\} - \{0\}$, $z \in A$. Comme Φ est surjective, on peut écrire $z = \sum_{1 \leq i \leq g} z_i$, $z_i \in C$. Mais alors on a

$$\begin{aligned}\{z\} - \{0\} &= \{z_1 + \ldots + z_g\} - \{z_2 + \ldots + z_g\} + \{z_2 + \ldots + z_g\} - \{0\} \\ &= \{u\} * (\{z_1\} - \{0\}) + \{z_2 + \ldots + z_g\} - \{0\},\end{aligned}$$

où $u = z_2 + \ldots + z_g$. Or $\{z_1\} - \{0\} \in \mathrm{Im}\, j_*(Pic^0(C))$ puisque $z_1 \in C$, $0 \in C$.

Plus généralement on a

$$\{z_k + \ldots + z_g\} - \{0\} = \{z_k + \ldots + z_g\} - \{z_{k+1} + \ldots + z_g\} + \{z_{k+1} + \ldots + z_g\} - \{0\}$$

$$= \{u_k\} * (\{z_k\} - \{0\}) + \{z_{k+1} + \ldots + z_g\} - \{0\},$$

avec $u_k = z_{k+1} + \ldots + z_g$ et $\{z_k\} - \{0\} \in j_*(Pic^0(C))$.

Ceci montre en raisonnant par récurrence sur le plus entier l tel que

$$z = \sum_{1 \leq i \leq l} t_i,\ t_i \in C,$$

que $\{z\} - \{0\}$ est bien dans le sous-groupe engendré par les $\{u\} * j_*(D)$, $D \in Pic^0(C)$, $u \in A$.

■

Preuve du lemme 2.33. On dispose d'une correspondance naturelle $Z \subset C^{(g)} \times C^{(g+1)}$ définie par

$$Z = \{(z, z') \in C^{(g)} \times C^{(g+1)},\ z \subset z'\}.$$

On a pour $z' = \{z_1, \ldots, z_{g+1}\} \in C^{(g+1)}$,

$$Z^* z' = \sum_i \{z_1, \ldots \hat{z}_i \ldots, z_{g+1}\} \in \mathcal{Z}_0(C^{(g)}) \tag{2.3.11}$$

On montre que $Z^* : \mathrm{CH}_0(C^{(g+1)}) \to \mathrm{CH}_0(C^{(g)})$ est un isomorphisme. Pour cela, considérons l'inclusion

$$i_0 : C^{(g)} \to C^{(g+1)}$$

donnée par $i_0(z) = z + c_0$, $z \in C^{(g)}$. Alors on a pour $z \in \mathrm{CH}_0(C^g)$

$$Z^*(i_{0*}(z)) = z + z'$$

où z' est un cycle de $C^{(g)}$ supporté sur $C^{(g-1)} \times c_0$. On en déduit facilement que

$$Z^* \circ i_{0*} : \mathrm{CH}_0(C^{(g)}) \to \mathrm{CH}_0(C^{(g)})$$

est un isomorphisme. Or $i_{0*} : \mathrm{CH}_0(C^{(g)}) \to \mathrm{CH}_0(C^{(g+1)})$ est un isomorphisme car $\Phi' \circ i_0 = \Phi$ et les deux applications

$$\Phi_* : \mathrm{CH}_0(C^{(g)}) \to \mathrm{CH}_0(A),\ \Phi'_* : \mathrm{CH}_0(C^{(g+1)}) \to \mathrm{CH}_0(A)$$

sont des isomorphismes. En effet Φ est birationnelle tandis que Φ' admet pour fibre générique $\mathbb{P}^1$ par le théorème d'Abel.

Mais d'autre part il est immédiat de vérifier en utilisant la formule (2.3.11) que $Z^* z' = 0$ dans $\mathrm{CH}_0(C^{(g)})$ pour un cycle z' de la forme $D'_1 \cdot \ldots \cdot D'_{g+1}$ avec $D'_k \in Pic^0(C)$. Donc on a $z' = 0$ pour un tel cycle.

■

2.3.3 Transformation de Fourier

Soit A une variété abélienne et soit $\widehat{A} = Pic^0 A$ la variété abélienne duale. Il existe un fibré en droites bien défini dit de Poincaré et noté $\mathcal{P}$ sur $A \times \widehat{A}$ satisfaisant les propriétés

1. Pour $L \in Pic^0 A$ paramétré par le point $l \in \widehat{A}$, on a $\mathcal{P}_{|A\times l} = L$.

2. $\mathcal{P}$ admet une restriction triviale à $0 \times \widehat{A}$.

La classe $c_1(\mathcal{P}) \in H^2(A \times \widehat{A}, \mathbb{Z})$ s'identifie à

$$Id \in H^1(\widehat{A}, \mathbb{Z})^* \otimes H^1(\widehat{A}, \mathbb{Z})$$

$$\cong H^1(A, \mathbb{Z}) \otimes H^1(\widehat{A}, \mathbb{Z}) \subset H^2(A \times \widehat{A}, \mathbb{Z}).$$

Soit Θ la classe de $\mathcal{P}$ dans $\mathrm{CH}^1(A \times \widehat{A})$ et introduisons

$$\exp \Theta = \sum_{0\leq i\leq 2g} \frac{\Theta^i}{i!} \in \mathrm{CH}(A \times \widehat{A})_{\mathbb{Q}}.$$

Définition 2.34 *([81], [6]) La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}(\widehat{A})_{\mathbb{Q}}$ est définie par*

$$\mathcal{F}(Z) = p_{2*}(p_1^* Z \cdot \exp \Theta).$$

On a le résultat suivant

Proposition 2.35 *Si*

$$\hat{\mathcal{F}} : \mathrm{CH}(\widehat{A})_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}}$$

est la transformée de Fourier de $\widehat{A}$ (où l'on utilise la bidualité $\widehat{\widehat{A}} = A$), on a

$$\hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = (-1)^g (-1)^*,$$

où $-1 : A \to A$ est l'application $z \mapsto -z$.

Démonstration. Si $\widehat{\Theta} \in \mathrm{CH}(\widehat{A} \times A)_{\mathbb{Q}}$ est la classe du diviseur de Poincaré $\hat{\mathcal{P}}$ de $\widehat{A}$, il faut montrer que

$$\exp \widehat{\Theta} \circ \exp \Theta = (-1)^g \Gamma_{-1} \in \mathrm{CH}_g(A \times A).$$

où $\circ$ est la composition des correspondances et Γ_{-1} est le graphe de l'application -1. Considérons le triple produit $A \times \widehat{A} \times A$ et notons p_i la projection sur le i-ème facteur, p_{ij} la projection sur le produit du i-ème et du j-ème facteur. On a l'égalité

$$p_{12}^* \mathcal{P} + p_{23}^* \hat{\mathcal{P}} = \tilde{\mu}^* \mathcal{P} \in Pic\, A \times \widehat{A} \times A$$

où $\tilde{\mu} : A \times \widehat{A} \times A \to A \times \widehat{A}$ est définie par $\tilde{\mu}(z, z', z'') = (z + z'', z')$. Cette égalité provient du fait que $\hat{\mathcal{P}}$ est l'image de $\mathcal{P}$ par l'isomorphisme $A \times \widehat{A} \cong \widehat{A} \times A$ et du fait que l'on a pour $D \in Pic^0 A$, $\mu^* D = pr_1^* D + pr_2^* D \in Pic^0 A \times A$.

Il vient alors en passant à l'exponentielle

$$p_{12}^*\exp\Theta\cdot p_{23}^*\exp\widehat{\Theta}=\tilde{\mu}^*\exp\Theta\in\mathrm{CH}(A\times\widehat{A}\times A)_{\mathbb{Q}}.$$

On a donc

$$\widehat{\Theta}\circ\Theta=p_{13*}(p_{12}^*\exp\Theta\cdot p_{23}^*\exp\widehat{\Theta})=p_{13*}(\tilde{\mu}^*\exp\Theta).$$

Notant $p:A\times\widehat{A}\to A$ la projection sur A et $\mu:A\times A\to A$ l'application somme

$$(z,z')\mapsto z+z',$$

on observe maintenant que le diagramme

$$\begin{array}{cccc} p_{13}: & A\times\widehat{A}\times A & \to & A\times A\\ & \tilde{\mu}\downarrow & & \mu\downarrow\\ p: & A\times\widehat{A} & \to & A \end{array}$$

est cartésien, avec μ plate de sorte qu'on a l'égalité $p_{13*}\circ\tilde{\mu}^*=\mu^*\circ p_*$ par la proposition **??**. On conclut donc que

$$\widehat{\Theta}\circ\Theta=\mu^*p_*\exp\Theta\in\mathrm{CH}(A\times A)_{\mathbb{Q}}.$$

Il reste donc seulement à prouver que

$$\mu^*p_*\exp\Theta=(-1)^g\Gamma_{-1}\in\mathrm{CH}(A\times A)_{\mathbb{Q}}.$$

Ceci résulte alors des égalités

$$p_*\exp\Theta=(-1)^g\{0\}\in\mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}}\tag{2.3.12}$$

et

$$\mu^*\{0\}=\Gamma_{-1}\in\mathrm{CH}(A\times A)_{\mathbb{Q}}.\tag{2.3.13}$$

La dernière égalité est évidente car $\mu^{-1}(0)=\{(x,-x),\,x\in A\}$ et μ est submersive de sorte que l'égalité ensembliste est une égalité de cycles.

L'égalité (2.3.12) se montre en notant que si $M_k:A\times\widehat{A}\to\widehat{A}\times A$ est l'application $(x,y)\mapsto(x,ky)$, on a $p\circ M_k=p$ et d'autre part $M_k^*\mathcal{P}=k\mathcal{P}$. On en déduit que $M_k^*\Theta^i=k^i\Theta^i$ et comme $M_{k*}\circ M_k^*=k^{2g}Id$, puisque k^{2g} est le degré de M_k, on trouve que

$$M_{k*}(\Theta^i)=k^{2g-i}\Theta^i\in\mathrm{CH}^i(A\times\widehat{A})_{\mathbb{Q}}.$$

Comme $p_*\circ M_{k*}=p_*$, il vient

$$p_*\Theta^i=0,\ i\neq 2g$$

et donc

$$p_*\exp\Theta=p_*\frac{\Theta^{2g}}{2g!}\in\mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}}.$$

Mais le même argument appliqué à la multiplication M_k' définie par $M_k'(z,z')=(kz,z')$ montre aussi que le zéro-cycle $p_*\frac{\Theta^{2g}}{2g!}$ satisfait

$$m_{k*}z=z\in\mathrm{CH}_0(A)_{\mathbb{Q}},\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

où $m_k : A \to A$ est la multiplication par k. Il est facile d'en déduire alors que $z = \alpha\{0\}$, où $\alpha \in \mathbb{Q}$ est donné par $\alpha = d^0 \frac{\Theta^{2g}}{2g!}$. En effet, on utilise la filtration de Bloch sur $\mathrm{CH}_0(A)$. Comme les quotients successifs $Gr_F^i \mathrm{CH}_0(A)$ sont des quotients de $A^{\otimes i}$, m_{k*} agit par k^i sur $Gr_F^i \mathrm{CH}_0(A)$ et il en résulte qu'un cycle $z \in \mathrm{CH}_0(A)_Q$ tel que $m_{k*} z = z$ est nécessairement un multiple de $\{0\}$.

Pour conclure, on calcule facilement que $\alpha = (-1)^g$.

■

La transformation de Fourier possède également la propriété remarquable d'échanger le produit de Pontrjagin et le produit d'intersection :

Proposition 2.36 *Pour Z, $Z' \in CH(A)_{\mathbb{Q}}$, on a la relation*

$$\mathcal{F}(Z * Z') = \mathcal{F}(Z) \cdot \mathcal{F}(Z') \,\mathrm{dans}\, CH(\widehat{A})_{\mathbb{Q}}.$$

Démonstration. On a par définition

$$Z * Z' = \mu_*(Z \times Z'),$$

où $Z \times Z' = pr_1^* Z \cdot pr_2^* Z' \in CH(A \times A)_{\mathbb{Q}}$. Il vient donc, notant p_1, p_2 les projections de $A \times \widehat{A}$ sur ses facteurs, et $\tilde{\mu} = (\mu, Id) : A \times A \times \widehat{A} \to A \times \widehat{A}$,

$$p_1^*(Z * Z') = p_1^* \mu_*(Z \times Z') = \tilde{\mu}_*(p_{12}^*(Z \times Z'),$$

où $p_{12} : A \times A \times \widehat{A} \to A \times A$ est la projection sur les deux premiers facteurs.

Cela donne maintenant

$$\mathcal{F}(Z * Z') := p_{2*}(p_1^*(Z * Z') \cdot \exp \Theta) = p_{2*}(\tilde{\mu}_*(p_{12}^*(Z \times Z') \cdot \exp \Theta)$$

$$= p_{2*}\tilde{\mu}_*(p_{12}^*(Z \times Z') \cdot \tilde{\mu}^* \exp \Theta) = q_{3*}(p_{12}^*(Z \times Z') \cdot \tilde{\mu}^* \exp \Theta),$$

où $q_3 : A \times A \times \widehat{A} \to \widehat{A}$ est la projection sur le troisième facteur.

On utilise maintenant comme précédemment la relation

$$\tilde{\mu}^* \Theta = p_{13}^* \Theta + p_{23}^* \Theta$$

pour conclure que

$$\mathcal{F}(Z * Z') = q_{3*}(q_1^* Z \cdot q_2^* Z' \cdot p_{13}^* \exp \Theta \cdot p_{23}^* \exp \Theta,$$

où les q_i sont les projections de $A \times A \times \widehat{A}$ sur ses facteurs.

Par application de la formule de projection, on trouve alors que le terme de droite est égal à $\mathcal{F}(Z) \cdot \mathcal{F}(Z')$. ■

2.3.4 Résultats de Beauville

Outre la structure donnée par le produit de Pontrjagin, les groupes de Chow $\mathrm{CH}_i(A)_{\mathbb{Q}}$ sont munis de l'action des homothéties

$$m_k^* : \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}},\ k \in \mathbb{Z}^*.$$

Les homothéties agissent par ailleurs sur la cohomologie de A, et comme $m_k^* = kId$ sur $H^1(A,\mathbb{Z})$ et $H^l(A,\mathbb{Z}) = \wedge^l H^1(A,\mathbb{Z})$, m_k^* agit par $k^l Id$ sur $H^l(A,\mathbb{Z})$. La conjecture 2.21 prédit que $\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}}$ possède une filtration $F^i\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}}$ telle que $F^{l+1}\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}} = 0$ et qu'une correspondance agissant trivialement sur $H^{2l-i}(A,\mathbb{Z}$ agit trivialement sur $Gr_F^i\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}}$. Les morphismes m_k^* doivent donc agir par $k^{2l-i}Id$ sur $Gr_F^i\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}}$ et l'on conclut que cette conjecture prédit en fait une décomposition en somme directe

$$\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{0\le i\le l}\mathrm{CH}^l_i(A)_{\mathbb{Q}},$$

où

$$\mathrm{CH}^l_i(A)_{\mathbb{Q}} = \{Z \in \mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}},\ m_k^*Z = k^{2l-i}Z,\ \forall k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

En utilisant la transformée de Fourier, Beauville montre

Théorème 2.37 *[5]* $\mathrm{CH}^l_i(A)_{\mathbb{Q}}$ *étant défini comme ci-dessus, on a une décomposition*

$$\mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}} = \oplus_{l-g\le i\le l}\mathrm{CH}^l_i(A)_{\mathbb{Q}}. \tag{2.3.14}$$

Cette décomposition est obtenue à l'aide de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$. Si $Z \in \mathrm{CH}^l(A)_{\mathbb{Q}}$, écrivons $\mathcal{F}(Z) = \sum_q Y_q$, $Y_q \in \mathrm{CH}^q(\widehat{A})$. Alors Beauville montre en utilisant le comportement de $\mathcal{F}$ par rapport aux isogénies $m : A \to A$, $m \in \mathbb{Z}$, que $\hat{\mathcal{F}}(Y_q) \in \mathrm{CH}^l_s(A)_{\mathbb{Q}}$ avec $s = l + q - g$. On a donc bien la décomposition

$$(-1)^g(-1)_*Z = \sum_q Z_q,\ Z_q = \hat{\mathcal{F}}(Y_q) \in \mathrm{CH}^l_{l+q-g}(A)_{\mathbb{Q}}.$$

Comme $0 \le q \le g$, on a bien $l - g \le l + q - g \le g$ dans cette décomposition.

Le problème de montrer que dans la décomposition de Beauville (2.3.14), seuls les entiers i positifs interviennent (ainsi que le prédit la conjecture 2.21) reste ouvert.

Exercices pour le chapitre 11

1. *Filtration de Bloch-Beilinson et filtration de Nori.* Soit X une variété projective lisse de dimension n, et soit $Y \overset{j}{\hookrightarrow} X$ une hypersurface ample.

   a) En utilisant le théorème de Lefschetz **??**, montrer que si la conjecture de Hodge est satisfaite, il existe un cycle $\Gamma \in CH^{n-1}(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$ tel que le cycle

$$\Gamma' := (1,j)_*(\Gamma) \in CH^n(X \times X)_{\mathbb{Q}}$$

satisfasse
$$[\Gamma']^* : H^l(X, \mathbb{Q}) \to H^l(X, \mathbb{Q})$$
est égal à l'identité pour $l \leq n-1$.

b) Soient $Y_n \subset \ldots \subset Y_1 \subset Y_0 = X$ des sous-variétés lisses, telles que Y_i est une hypersurface ample de Y_{i-1} pour $n \leq i \leq 1$. Notons $j_i : Y_i \hookrightarrow X$ l'inclusion. Montrer de même que si la conjecture de Hodge est satisfaite, il existe pour tout i un cycle $\Gamma_i \in CH^{n-i}(X \times Y)_{\mathbb{Q}}$ tel que le cycle
$$\Gamma_i' := (1, j_i)_*(\Gamma_i) \in CH^n(X \times X)_{\mathbb{Q}}$$
satisfasse
$$[\Gamma_i']^* : H^l(X, \mathbb{Q}) \to H^l(X, \mathbb{Q})$$
est égal à l'identité pour $l \leq n-i$.

c) Montrer que si la conjecture de Bloch-Beilinson 2.21 est satisfaite,
$$\Gamma_i' : CH^l(X)_{\mathbb{Q}} \to CH^l(X)_{\mathbb{Q}}$$
agit par l'identité sur $Gr_F^s CH^l(X)_{\mathbb{Q}}, s \geq 2l-n+i$. En déduire que sous la même hypothèse, l'application
$$\Gamma_i{}^* : F^{2l-n+i}CH^l(Y_i)_{\mathbb{Q}} \to F^{2l-n+i}CH^l(X)_{\mathbb{Q}}$$
est surjective.

Supposons de plus $2l = n$. On a alors $\dim Y_i = 2l - i$, et
$$CH^l(Y_i) = CH_{l-i}(Y_i).$$
On a donc montré pour $2l = n = \dim X$:

Si la conjecture de Hodge et la conjecture de Bloch-Beilinson sont satisfaites, les applications
$$\Gamma_i'^* : F^i CH_{l-i}(Y_i)_{\mathbb{Q}} \to F^i CH^l(X)_{\mathbb{Q}}$$
sont surjectives. En particulier, pour $i > 0$, on a :
$$F^i CH^l(X)_{\mathbb{Q}} \subset N_{l-i} CH^l(X)_{hom,\mathbb{Q}}, \tag{2.3.15}$$
*où $N_j CH(X)_{hom}$ est la filtration de Nori (cf section **??**). Enfin on a*
$$F^l CH^l(X)_{\mathbb{Q}} \subset N_0 CH^l(X)_{hom,\mathbb{Q}} = CH^l(X)_{alg,\mathbb{Q}}. \tag{2.3.16}$$

d) Montrer que les conclusions (2.3.15) et (2.3.16) restent vraies sous les mêmes hypothèses sans la condition $2l = n$. (Si $2l > n$, remplacer X par $X \times X'$, avec $\dim X' = 2l - n$. Si $2l < n$, appliquer c).)

2. *D'autres applications de la transformation de Fourier dans l'anneau de chow d'une variété abélienne.* Soit A une variété abélienne, et soit $Z \in CH^l(A)_{\mathbb{Q}}$.

   a) Montrer que si la conjecture de Bloch-Beilinson 2.21 est satisfaite, les composantes Z_i de la décomposition de Beauville

   $$Z = \sum_i Z_i,\ Z_i \in CH^l_i(A)_{\mathbb{Q}}$$

   sont nulles pour $i < 0$.

   b) En déduire que sous la même hypothèse les composantes Y_q de la décomposition

   $$\mathcal{F}(Z) = \sum_q Y_q,\ Y_q \in CH^q(\widehat{A}),$$

   sont nulles pour $q < g - l$. (Conjecture de Beauville).

   c) (cf [6]). Montrer que si la conclusion de a) (ou b)) est satisfaite, on a

   $$Z_1 * \ldots * Z_k * Z = 0 \text{ dans } \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}}$$

   pour $k > l$, et pour $Z_i \in CH(A)_{hom}$, $\forall i$. (Utiliser les propositions 2.35 et 2.36 et le fait que pour $Z_i \in CH(A)_{hom}$, on a $\mathcal{F}(Z_i) \in CH^{>0}(\widehat{A})$.)

   d) Montrer de même que si la conclusion de a) (ou b)) est satisfaite, on a

   $$Z_1 * \ldots * Z_k * Z = 0 \in \mathrm{CH}(A)_{alg,\mathbb{Q}} \subset \mathrm{CH}(A)_{\mathbb{Q}}$$

   pour $k \geq l$, et pour $Z_i \in CH(A)_{hom}$, $\forall i$.

Bibliographie

[1] A. Andreotti, T. Frankel. The second Lefschetz theorem on hyperplane sections, in *Global analysis, A symposium in honor of K. Kodaira*, Princeton University Press, Princeton (1969), 1-20.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris . *Geometry of algebraic curves* vol. I, Grundlehren der Math. Wiss. 267, Springer (1985).

[3] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven. *Compact Complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band 4, Springer-Verlag (1984).

[4] A. Beauville. Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, Ann. Sci. École Norm. Sup. 10, (1977), 309-391.

[5] A. Beauville. Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne, Math. Ann. 273, 647-651 (1986).

[6] A. Beauville. Quelques remarques sur la transformée de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne, dans *Algebraic Geometry*, (Tokyo/Kyoto 1982), LNM 1016, 238-260, Springer-Verlag, (1983).

[7] A. Beauville. Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et intersections complètes, LNM 1194 Springer-Verlag (1986), 8-18.

[8] A. Beauville. *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque $n^0 54$, Société mathématique de France, (1978).

[9] W. Barth. Transplanting cohomology classes in complex projective space, Amer. J. Math. 92, 951-967, (1970).

[10] S. Bloch. Semi-regularity and de Rham cohomology, Inventiones Math. 17, 51-66 (1972).

[11] S. Bloch. *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Series IV (1980).

[12] S. Bloch. Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties, Invent. Math. 37, 215-228, (1976).

[13] S. Bloch. K_2 and Algebraic cycles, Ann. of Math. (1973), 347-379.

[14] S. Bloch. Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, Compositio Mathematica 39 (1979) 107-127.

[15] S. Bloch, A. Kas, D. Lieberman. Zero-cycles on surfaces with $p_g = 0$. Comp. Math. Vol. 33, 1976, p 135-145.

[16] S. Bloch, V. Srinivas. Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. of Math. 105 (1983) 1235-1253.

[17] S. Bloch, A. Ogus. Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4eme série, t. 7, 1974, 181-202.

[18] R. Bott. Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 2 69, (1957) 203-248.

[19] J. Carlson. The geometry of the extension class of a mixed Hodge structure, Proc. Sympos. Pure Math. 46 (1987), 199-222.

[20] J. Carlson, R. Donagi. Hypersurfaces variations are maximal, Inventiones Math. 89, 371-374 (1987).

[21] J. Carlson, Ph. Griffiths. Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem, in *Géométrie Algébrique*, Angers, 1980, (A. Beauville, ed.), Sijthoff-Noordhoff, 51-76.

[22] J. Carlson, M. Green, Ph. Griffiths, J. Harris. Infinitesimal variations of Hodge structure (I), Compositio Mathematica 50 (1983) 109-205.

[23] J. Carlson, D. Toledo. Discriminant complements and kernels of monodromy representations, Duke Math. J. vol. 97, n^0 3, 621-648, (1999).

[24] E. Cattani, P. Deligne, A. Kaplan, On the locus of Hodge classes, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), 2, 483-506.

[25] H. Clemens . Double solids, Advances in Mathematics 47, 107-230 (1983).

[26] H. Clemens. Homological equivalence, modulo algebraic equivalence is not finitely generated, Publ. Math. IHES 58 (1983) 19-38.

[27] H. Clemens. Some results about Abel-Jacobi mappings, dans *Topics in transcendental algebraic geometry*, edited by P. Griffiths, Annals of Mathematics studies, Study 106, Princeton University Press, (1984).

[28] A. Conte, J. P. Murre. The Hodge conjecture for fourfolds admitting a covering by rational curves, Math. Ann. 238 (1978), 461-513.

[29] D. Cox, M. Green. Polynomial Structures and Generic Torelli for Projective Hypersurfaces, Compositio Mathematica 73, (1990), 121-124.

[30] P. Deligne. La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, Inventiones math. 15, 206-226 (1972).

[31] P. Deligne. Théorèmes de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. math. IHES 35 (1968) 107-126.

[32] P. Deligne. Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES 40 (1971), 5-57.

[33] P. Deligne. Théorie de Hodge III, Publ. I.H.E.S. 44 (1975), 5-77.

[34] P. Deligne, Ph. Griffiths, J. Morgan. D. Sullivan. Real Homotopy Theory of Kähler Manifolds, Inventiones Math. 29, 245-274 (1975).

[35] J. P. Demailly. Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, dans *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et synthèses 3, (1996), Société mathématique de France, 3-111.

[36] R. Donagi. Generic Torelli theorem for projective hypersurfaces, Compositio Math. 50 (1983) 325-353.

[37] R. Donagi, M. Green. A new proof of the symmetrizer lemma and a stronger weak Torelli theorem, J. Differential Geometry 20 459-461 (1984).

[38] H. Esnault, K. Paranjape. Remarks on absolute de Rham and absolute Hodge cycles. C. R. Acad. Sc. Paris, t. **319**, Série I (1994) 67-72.

[39] H. Esnault, E. Viehweg. *Lectures on Vanishing Theorems*, DMV Seminar band 20, Birkhäuser, (1992).

[40] H. Esnault, E. Viehweg, M. Levine. Chow groups of projective varieties of very small degree, Duke Math J. 87 (1997) 29-58.

[41] H. Esnault, E. Viehweg. Deligne-Beilinson cohomology, dans *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, (éd. par Rapoport, Schappacher et Schneider), Perspect. Math. 4, Academic Press (1988), 43-91.

[42] F. Elzein, S. Zucker. Extendability of normal functions associated to algebraic cycles, dans *Topics in transcendental algebraic geometry* (éd. P. Griffiths) Ann. of Math. Studies 106 (1984), 269-288.

[43] W. Fulton. *Intersection Theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge. Band. 2, Springer (1984).

[44] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).

[45] M. Green. Higher Abel-Jacobi maps, Documenta Mathematica, volume supplémentaire, Actes du congrès international des mathématiciens 1998, II, 267-276.

[46] M. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. Diff. Geom. 19 (1984), 125-171.

[47] M. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties II, J. Diff. Geom. 20 (1984) 279-289.

[48] M. Green. The period map for hypersurface sections of high degree of an arbitrary variety, Compositio Mathematica 55(1984) 135-156.

[49] M. Green. Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz locus, J. Diff. Geom. 29, 295-302, (1989).

[50] M. Green. Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel-Jacobi map, J. Diff. Geom 29 (1989), 545-555.

[51] M. Green, S. Müller-Stach : Algebraic cycles on a general complete intersection of high multi-degree of a smooth projective variety, Compositio Mathematica 100 (1996), 305-309.

[52] M. Green, J. Murre, C. Voisin. *Algebraic cycles and Hodge theory*, CIME course, Lecture Notes in Math. 1594, Springer (1993).

[53] Ph. Griffiths. A theorem concerning the differential equations satisfied by normal functions associated to algebraic cycles, Amer. J. Math. 101 (1979) 94-131.

[54] Ph. Griffiths. On the periods of certain rational integrals I,II, Ann. of Math. 90 (1969), 460-541.

[55] Ph. Griffiths. Curvature properties of the Hodge bundles, dans [59], 29-49.

[56] Ph. Griffiths. Infinitesimal variations of Hodge structures (III): Determinantal varieties and the infinitesimal invariant of normal functions, Compositio Mathematica 50 (1983) 267-324.

[57] Ph. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, Amer. J. Math. 90 (1968), 568-626, 805-865.

[58] Ph. Griffiths, J. Harris. Principles of Algebraic Geometry, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience (1978).

[59] Ph. Griffiths et al. *Topics in transcendental algebraic geometry*, ed. by P. Griffiths, Annals of math. studies, study 106, Princeton University Press 1984.

[60] Ph. Griffiths, J. Morgan. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Progress in Math. Vol. 16, Birkhäuser (1981).

[61] R. Hain. The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group, Proc. Symp. Pure Math. 46, Part 2 (1987), 247-281.

[62] R. Hain. The de Rham homotopy Theory of complex algebraic varieties I, K-theory 1 (1987), 271-324.

[63] R. Hain. Higher Albanese manifolds, LNM 1246 Springer-Verlag (1987).

[64] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Grad. texts in Math. 52, 1977, Springer-Verlag.

[65] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic over a field of characteristic zero I, II, Ann. of Math. 79 (1964) 109-326.

[66] H. Inoze, M. Mizukami. Rational Equivalence of 0-cycles on some surfaces of general type with $p_g = 0$, Math. Annalen 244, 205-217 (1979).

[67] U. Jannsen. Motivic sheaves and Filtrations on Chow groups, dans *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 55, Part 1, Édité par U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre, (1994) 245-302.

[68] U. Jannsen. Mixed Motives and Algebraic K-theory, LNM 1400, (1989) Springer-Verlag.

[69] N. Katz. Étude cohomologique des pinceaux de Lefschetz, SGA 7, exposé 18.

[70] S. Kleiman. Algebraic cycles and the Weil conjectures, dans *Dix exposés sur la théorie des schémas*, North-Holland, Amsterdam (1968), 359-386.

[71] S. Kobayashi. *Hyperbolic manifolds*, Decker, New-York (1970).

[72] K. Kodaira. On Compact Analytic Surfaces III, Ann. of Math. 78 (1963) 1-40.

[73] K. Kodaira. On stability of compact submanifolds of complex manifolds, Amer. J. Math. Vol. 85 (1963), 79-94.

[74] J. Kollár. Lemme p. 134 dans *Classification of irregular varieties*, édité par E. Ballico, F. Catanese, C. Ciliberto, Lecture Notes in Math. 1515, Springer (1990).

[75] J. Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag (1996).

[76] R. Laterveer. Algebraic varieties with small Chow groups, J. Math. Kyoto Univ. 38 (1996), 673-694.

[77] J. Lewis. A generalization of Mumford's theorem, Illinois Journal of Mathematics 39 (1995), 288-304.

[78] Yu. Manin. Correspondences, motives and monoidal transforms, Math. USSR Sbornik 6, (1968) 439-470.

[79] J. Milnor. *Morse theory*, Princeton University Press (1963), Annals of Mathematical studies $n^0 51$.

[80] J. Morgan. The algebraic topology of smooth algebraic varieties, Publ. I.H.E.S. Vol. 48, (1978), 137-204.

[81] S. Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, Nagoya Math. J. 81 (1981), 153-175.

[82] D. Mumford. *Algebraic Geometry I: Complex projective varieties*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, Springer-Verlag (1976).

[83] D. Mumford. *The red book of varieties and schemes*, réédition, LNM 1358, Springer-Verlag (1988).

[84] D. Mumford. Rational equivalence of zero-cycles on surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 9 (1968),195-204.

[85] J. P. Murre. On the motive of an algebraic surface, Journal reine und angew. Math. 409 (1990), 190-204.

[86] J. P. Murre. Applications of algebraic K-theory to the theory of algebraic cycles, dans *Proc. Conf. Algebraic geometry*, Sitjes 1983, LNM 1124 (1985), 216-261, Springer-Verlag.

[87] J. P. Murre. On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety, Indag. Mathem., N. S.,4 (2), 177-188.

[88] M. Nori. Algebraic cycles and Hodge theoretic connectivity, Invent. Math. 111 (1993) 349-373.

[89] K. Paranjape. Cohomological and cycle theoretic connectivity, Ann. of math. 140 641-660,(1994).

[90] C. Peters. On certain examples of surfaces with $p_g = 0$ due to Burniat, Nagoya Math. J. 66 (1977), 109-119.

[91] I. Piatetski-Shapiro, I. Shafarevich. A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestiya 35 (1971), 530-572.

[92] Z. Ran. Hodge theory and the Hilbert scheme, J. Diff. Geom. 37 (1993) 191-198.

[93] A. Roitman. Rational equivalence of zero-cycles, Math. USSR Sbornik 18 (1972) 571-588.

[94] A. Roitman. The torsion of the group of zero-cycles modulo rational equivalence, Ann. of Math. 111 (1980) 553-569.

[95] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, New-York, McGraw-Hill (1966).

[96] S. Saito. Motives and Filtrations on Chow groups, Invent. Math. 125 (1996), 149-196.

[97] M. Saito. Arithmetic Mixed Hodge Modules, preprint 1999.

[98] C. Schoen. On Hodge structures and non-representability of Chow groups, Compositio Mathematica 88 , 285-316, (1993).

[99] B. Shiffman, A. J. Sommese. *Vanishing Theorems on complex manifolds*, Progress in Mathematics, Vol. 56, Birkhäuser (1985).

[100] E. Spanier. *Algebraic Topology*, Tata Mcgraw-Hill publishing company, New-Delhi (1966).

[101] D. Sullivan. Infinitesimal calculations in Topology, Publ. Math. I.H.E.S. Vol. 47, (1978), 269-331.

[102] E. Viehweg. *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 30, Springer (1995).

[103] C. Voisin. Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe I.

[104] C. Voisin. Une précision concernant le théorème de Noether, Math. Annalen 280, 605-611, (1988).

[105] C. Voisin. Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz, Comment. Math. Helvetici (1989) 515-526.

[106] C. Voisin. A generic Torelli theorem for the quintic threefold, dans *New trends in Algebraic Geometry*, édité par Hulek, Catanese, Peters et Reid, Lond. Math. Soc. Lecture Note Series 264.

[107] C. Voisin. Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales, C.R.A.S. Paris, t.307, Série 1, 157-160 (1988).

[108] C. Voisin. Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d'un automorphisme, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie 4, vol. 19 (1992) 473-492.

[109] C. Voisin. Variations de structure de Hodge et zéro-cycles sur les surfaces générales, Mathematische Annalen 299, 77-103 (1994).

[110] C. Voisin. Some results on Green's higher Abel-Jacobi map, Annals of Math. 149 , 451-473 (1999).

[111] C. Voisin. Nori's connectivity theorem and higher Chow groups, Journal de L'Institut de Mathématiques de Jussieu (2002).